Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4145 Lineære metoder**

Fagleg kontakt under eksamen: Eugenia Malinnikova

Tlf: 7355 0257

Eksamensdato: Laurdag, 20. desember 2014

Eksamenstid (frå–til): 9:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Kode D: Ingen prenta eller handskrive hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillaten: Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S

Annan informasjon:
Eksamen er sett saman av tolv spørsmål, rekkefølgja følger kursets oppbygging, ikkje vanskegrad. Alle svar skal presenterast på presist og rigorøst vis, med alle føresetnadar skrivne ned og argumenta grunngjevne. Kvar løysing vil verte vurdert som anten *mangelfull* (F), *tilstrekkeleg* (E), *god* (C) eller *utmerkt* (A). Fem tilsrekkelege løysingar garanterar ein E; sju tilstrekkelege med minst éin god ein D; sju tilstrekkelege med minst fem gode ein C; ni gode med minst to utmerkte ein B; ni gode med minst sju utmerkte ein A. Dette er garanterte grenser. Utover dette vert karakteren basert på ei totalvurdering.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Lat $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ vere normer på eit vektorrom V.

a) Vis at $\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2$ også er ei norm. Gå ut frå at $\{x_n\}$ er ei Cauchy-følgje i $(V, \|\cdot\|)$, og vis at ho er ei Cauchy-følgje i $(V, \|\cdot\|_1)$.

b) Gje eit døme på eit vektorrom V, to normer $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ på V og ei følgje $\{x_n\}$ slik at $\{x_n\}$ er ei Cauchy-følgje i $(V, \|\cdot\|_1)$ men ikkje i $(V, \|\cdot\|)$, der $\|\cdot\|$ er definert som i **a)**. Vis at dimensjonen til V må vere uendeleg i eit slikt døme.

Oppgåve 2 Lat

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn ein LU-dekomposisjon av A, og løys det lineære systemet $Ax = b$.

b) Skriv om systemet $Ax = b$ på forma $x = Bx + c$ slik at $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er ein kontraksjon i $\mathbb{R}^3$ med norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Vis korleis det nye systemet kan løysast ved iterasjonar som startar med ein vilkårleg vektor $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Oppgåve 3

a) Lat $C([0,2] \times [0,2], \mathbb{R})$ vere eit indreproduktrom med

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 \int_0^2 f(x,y) g(x,y) dx dy.$$

Finn ein ortogonal basis til $\text{span}\{1, x, y\}$ i dette rommet.

b) Finn $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at $\int_0^2 \int_0^2 |xy - a - bx - cy|^2 dx dy$ er minst mogeleg.

Oppgåve 4

a) Lat M vere eit lukka underrom av eit Hilbertrom H. Lat $P_M(x)$ vere den ortogonale projeksjonen av $x \in H$ inn i M. Vis at $P_M^2 = P_M$, $P_M^* = P_M$ og $\|P_M\| = 1$.

b) Lat H vere eit Hilbertrom og $P : H \to H$ vere ein avgrensa lineær transformasjon slik at $P = P^*$ og $P^2 = P$. Vis at P er den ortogonale projeksjonen inn i eit lukka underrom M av H.

Oppgåve 5 Lat X, Y vere Banachrom og $T : X \to Y$ vere ein avgrensa lineær transformasjon.

a) Vis at kjernen til T (nullrommet) er eit lukka underrom av X.

b) Gje eit døme på Banachrom X, Y og ein avgrensa lineær transformasjon $T : X \to Y$ slik at verdimengda til T ikkje er lukka.

Oppgåve 6 Lat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at A har to egenverdiar $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$, og uttrykk A på Jordan normalform ved å finne både J og basisskiftematrisa T i $A = TJT^{-1}$.

b) Løys initialverdiproblemet $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$.