NTNU

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4145 Lineære Metoder**

Fagleg kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 735 917 44

Eksamensdato: Onsdag, 11. desember, 2013

Eksamenstid (frå–til): 15:00–19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Kode D: Ingen prenta eller handskrive hjelpemiddel tillatne. Kalkulatorane Citizen SR-270X (inkludert College) eller Hewlett Packard HP30S.

Annan informasjon:

Som i faget, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Med mindre noko anna er spesifisert, føreset standard basis, indreprodukt, norm og metrikk på $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$. Bortsett frå i Oppgåve 1, skal alle svar presenterast på ein presis og rigorøs måte, med alle føresetnadar skrivne ned og argumentar grunngjevne.

Eksamen er samansett av 11 spørsmål (Oppgåve 1 reknast som eitt spørsmål). Kvar løysing vil verte vurdert som anten *mangelfull*, *akseptabel*, *god* eller *utmerkt*. Fem akseptable løysingar garanterar ein E; sju akseptable og minst éin god ein D; sju akseptable og minst fem gode ein C; ni gode og minst to utmerkte ein B; ni gode og minst sju utmerkte ein A. Dette er garanterte grenser. Utover dette baserast karakteren på ei totalvurdering.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Dato Sign

Oppgåve 1 (Oversyn)
For kvar av dei følgjande utsagna, angjev om det er sant eller usant (inga prov naudsynt).

(i) Det finst ein bijektiv funksjon $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

(ii) Alle l_p-romma, $1 \leq p \leq \infty$, er Hilbert-rom.

(iii) Alle lineære transformasjonar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, med $n, m \in \mathbb{N}$, kan realiserast av matriser.

(iv) Funksjonen $t \mapsto \sin(1/t)$ ligg i den lukka einingsballen i $BC((0,1),\mathbb{R})$ (med standard supremumsnorm).

(v) Rangen til ei matrise er alltid den same som dimensjonen til nullrommet hennar.

(vi) For ei kvar ortonormal følgje av vektorar $\{e_j\}_j$ i eit Hilbert-rom, og ei kvar følgje $\{c_j\}_j \in l_2$ av skalarar, har ein $\langle \sum_j c_j e_j, \sum_k c_k e_k \rangle = \sum_j |c_j|^2$.

(vii) Cauchy–Schwarz-ulikskapen hold i eit kvart Banach-rom.

(viii) Mengda $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1\}$ er konveks.

(ix) $L_2((-\pi, \pi), \mathbb{R})$ er isometrisk isomorf med sin duale.

(x) Startverdiproblemet $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x(0) = 0$, har ei unik løysing $u \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$.

Oppgåve 2 (Lineære transformasjonar)
Denne oppgåva er meint å teste kjennskap til definisjonar og <u>grunnleggjande</u> reknedugleik.

a) Avgjer bildet til matrisa

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sett på som ei avbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Er A inverterbar; sjølvadjungert; nilpotent; unitær? For kvar av konsepta, gjev definisjonen saman med svaret ditt.

b) Kva er operatornormen til A?

c) Gjeven $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ og $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, kva er $\exp(tA)$?

Oppgåve 3 (Metriske rom)
Lat d vere avstanden på $\mathbb{R}$ gjeven ved

$$d(x, y) = \frac{1}{\pi} \left|\arctan(x) - \arctan(y)\right|.$$

a) Verifiser at d er ein metrikk på $\mathbb{R}$.

b) Vis at den opne einingsballen i $(\mathbb{R}, d)$ også er lukka, og at $(\mathbb{R}, d)$ ikkje er eit komplett metrisk rom.

Oppgåve 4 (Spektralteori)

a) Ei 2×2 symmetrisk matrise har ein egenverdi 4 med tilhøyrande egenvektor $(1, 2)$. Matrisa har også ein egenverdi 1. Bruk dette til å bestemme matrisa.

b) Uttrykk

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

på Jordan normalform ved å finne både J og basisskiftematrisa T i $A = TJT^{-1}$. *Hint: matrisa har ein egenverdi av trippel algebraisk multiplisitet.*

Oppgåve 5 (Indreprodukt, Hilbert-rom)

a) I $\mathbb{R}^4$, lat

$$M = \operatorname{span}\{(1, 2, 3, 2), (1, 0, 1, 1)\} \quad \text{og} \quad y = (2, 0, 3, 1).$$

Berekn $d = \operatorname{dist}(y, M)$. Finst det eit punkt $x_0 \in M$ med $\|x_0 - y\| = d$ (om dette er høve, forklar kvifor og finn det; viss ikkje, grunngjev kvifor det ikkje kan finnast)?

b) Vis at det finst ein $c \geq 0$ slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(2t)\, dt \leq c \left(\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2\, dt \right)^{1/2},$$

for kvar $x \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, og at $c = \sqrt{\pi}$ er den minste mogelege.

c) Lat H vere eit Hilbert-rom (reelt eller komplekst) med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og ein ortonormal basis $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Gjeven eit element $y \in H$, vis at avbildninga $x \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$ er ein avgrensa lineær funksjonal på H.