Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4145 Lineære metoder**

Fagleg kontakt under eksamen: Franz Luef[a], Antoine Julien[b]

Tlf: [a]40614405 , [b]91715878

Eksamensdato: 17.12.2015

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D: Ingen prenta eller handskrive hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillaten: Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S

Annan informasjon:
Eksamen er sett saman av tolv spørsmål, rekkefølgja er ikkje ordna etter vanskegrad. Alle svar skal presenterast på presist og rigorøst vis, med alle føresetnadar skrivne ned og argumenta grunngjevne. Kvar løysing vil verte vurdert som anten *mangelfull* (F), *tilstrekkeleg* (E), *god* (C) eller *utmerkt* (A). Fem tilsrekkelege løysingar garanterar ein E; sju tilstrekkelege med minst éin god ein D; sju tilstrekkelege med minst fem gode ein C; ni gode med minst to utmerkte ein B; ni gode med minst sju utmerkte ein A. Dette er garanterte grenser. Utover dette vert karakteren basert på ei totalvurdering.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Oppgåve 1

a) Oppgje (utan prov) om påstanden er sann eller usann.

1. Ein Lipschitz-kontinuerleg funksjon er uniformt kontinuerleg.
2. Verdimengda til ein lineær operator T på eit normert rom X er alltid lukka.
3. Anta at f er ein funksjon på $\mathbb{R}$. Då definerer $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ ein metrikk på $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}^n$ med $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty = \max_i |x_i|$ er komplett.
5. Ein kontraksjon på eit ikkje-null metrisk rom har eit unikt fikspunkt.

b) Definer følgjande omgrep.

1. Definer det **ortgonale komplementet** til eit underrom M av eit Hilbert-rom $\mathcal{H}$.
2. Lat T vera ein lineær operator mellom to normerte rom $(X, \|.\|_X)$ og $(Y, \|.\|_Y)$. Definer **operator-norma** til T.
3. Lat T vera ein lineær avbilding av $\mathbb{C}^n$. Definer kva ein **generalisert eigevektor** til T er.
4. Anta at f er ein funksjon mellom to metriske rom (X, d_X) og (Y, d_Y). Definer kva det vil seie at f er **uniformt kontinuerleg**.
5. Definer kva ein **nullpotent** operator $T : V \to V$ er, for eit endeleg-dimensjonalt vektorrom V.

Oppgåve 2 La $\mathcal{P}_2$ vera rommet av polynom av grad høgst 2, og la T vera den lineære operatoren definert på $\mathcal{P}_2$ ved $Tf(x) = -f(x) - f'(x)$.

a) Finn matrise-representasjonen til T i forhold til basisen $1, x, x^2$ for $\mathcal{P}_2$ og det karakteristiske polynomet.

b) Finn dei generaliserte eigevektorane og eigeverdiane til T. Finn ein basis for rommet av generaliserte eigevektorer.

Oppgåve 3 Me betraktar matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Finn eigeverdiane og eigevektorane til A^*A.

b) Finn singulærverde-dekomposisjonen av A.

Oppgåve 4 La T vera den lineære operatoren definert på ℓ^2 ved

$$T(x_1, x_2, ...) = (0, 2x_1, x_2, 2x_3, ...).$$

a) Vis at T er ein avgrensa operator på ℓ^2 og bestem den adjungera til T. (Operatoren kan sjåast på som komposisjonen av ein multiplikasjons-operator og ein venstreforskuvings-operator på ℓ^2.)

b) Bestem kjerna og verdemengda til T. Bruk desse resultata til å finne kjerna og verdemengda til T^*.

Oppgåve 5 La $(X, \langle ., . \rangle)$ vera eit indreproduktsrom.

a) Definer den lineære funksjonalen $\varphi_y(x) := \langle x, y \rangle$ for ein fiksert $y \in X$. Vis at $\varphi_y : X \to \mathbb{C}$ er avgrensa.

b) Anta at (x_n) og (y_n) er konvergente følgjer, med $\lim_n x_n = x$ og $\lim_n y_n = y$. Vis at $\lim_n \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

Oppgåve 6 Vi definerer ei matrise og ein vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bruk Banach fikspunktteorem til å løyse $Ax = b$ for det normerte rommet $(\mathbb{R}^3, \|.\|_\infty)$. Det vil seie, skriv $Ax = b$ på forma $x = Bx + c$ slik at B er ein kontraksjon med konstant K på $\mathbb{R}^3$ med omsyn på norma $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, |y_3|\}$. Vis så at ein kan løyse dette problemet ved iterasjon frå vilkårleg startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

b) Vi lar $\tilde{x}$ nemne problemets fikspunkt og (x_n) følgja av iterasjonar. Vis at

$$d_\infty(x_n, \tilde{x}) \leq \frac{K^n}{1-K} d_\infty(x_0, x_1),$$

kor K er kontraksjons-konstanten K frå del a).