NTNU

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4145 Lineære Metoder**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm
Tlf: 735 917 44

Eksamensdato: Onsdag, 11. desember, 2013
Eksamenstid (fra–til): 15:00–19:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Kalkulatorene Citizen SR-270X (inkludert College-versjonen) eller Hewlett Packard HP30S.

Annen informasjon:
Som i faget, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Med mindre noe annet er spesifisert, antas standard basis, indreprodukt, norm og metrikk på $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$. Bortsett fra i Oppgave 1, skal alle svar presenteres på en presis og rigorøs måte, med alle antakelser skrevet ned og argumenter begrunnet.

Eksamen består av 11 spørsmål (Oppgave 1 regnes som ett spørsmål). Hver løsning vil bli bedømt som enten *mangelfull*, *akseptabel*, *god* eller *utmerket*. Fem akseptable løsninger garanterer en E; sju akseptable og minst én god en D; sju akseptable og minst fem gode en C; ni gode og minst to utmerkede en B; ni gode og minst sju utmerkede en A. Dette er garanterte grenser. Utover dette baseres karakteren på en helhetsvurdering.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Dato Sign

Oppgave 1 (Oversikt)
For hvert av de følgende utsagnene, angi om det er sant eller usant (ingen bevis nødvendig).

(i) Det finnes en bijektiv funksjon $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

(ii) Alle l_p-rommene, $1 \leq p \leq \infty$, er Hilbert-rom.

(iii) Alle lineære transformasjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, med $n, m \in \mathbb{N}$, kan realiseres av matriser.

(iv) Funksjonen $t \mapsto \sin(1/t)$ ligger i den lukkede enhetsballen i $BC((0,1), \mathbb{R})$ (med standard supremumsnorm).

(v) Rangen til en matrise er alltid den samme som dimensjonen til dens nullrom.

(vi) For enhver ortonormal følge av vektorer $\{e_j\}_j$ i et Hilbert-rom, og enhver følge $\{c_j\}_j \in l_2$ av skalarer, har en $\langle \sum_j c_j e_j, \sum_k c_k e_k \rangle = \sum_j |c_j|^2$.

(vii) Cauchy–Schwarz-ulikheten holder i ethvert Banach-rom.

(viii) Mengden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1\}$ er konveks.

(ix) $L_2((-\pi, \pi), \mathbb{R})$ er isometrisk isomorf med dets duale.

(x) Initialverdiproblemet $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x(0) = 0$, har en unik løsning $u \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$.

Oppgave 2 (Lineære transformasjoner)
Denne oppgaven er ment å teste kjennskap til definisjoner og <u>grunnleggende</u> regneferdigheter.

a) Avgjør bildet til matrisen

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sett på som en avbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Er A inverterbar; selvadjungert; nilpotent; unitær? For hvert av konseptene, gi definisjonen sammen med svaret ditt.

b) Hva er operatornormen til A?

c) Gitt at $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ og $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, hva er $\exp(tA)$?

Oppgave 3 (Metriske rom)
La d være distansen på $\mathbb{R}$ gitt ved

$$d(x,y) = \frac{1}{\pi}\left|\arctan(x) - \arctan(y)\right|.$$

a) Verifiser at d er en metrikk på $\mathbb{R}$.

b) Vis at den åpne enhetsballen i $(\mathbb{R}, d)$ også er lukket, samt at $(\mathbb{R}, d)$ ikke er et komplett metrisk rom.

Oppgave 4 (Spektralteori)

a) En 2×2 symmetrisk matrise har en egenverdi 4 med tilhørende egenvektor $(1,2)$. Matrisen har også en egenverdi 1. Bruk dette til å bestemme matrisen.

b) Uttrykk

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

på Jordan normalform ved å finne både J og basisskiftematrisen T i $A = TJT^{-1}$. *Hint: matrisen har en egenverdi av trippel algebraisk multiplisitet.*

Oppgave 5 (Indreprodukt, Hilbert-rom)

a) I $\mathbb{R}^4$, la

$$M = \operatorname{span}\{(1,2,3,2),(1,0,1,1)\} \quad \text{og} \quad y = (2,0,3,1).$$

Beregn $d = \operatorname{dist}(y, M)$. Finnes det et punkt $x_0 \in M$ med $\|x_0 - y\| = d$ (hvis dette er tilfellet, forklar hvorfor og finn dette; hvis ikke, begrunn hvorfor det ikke kan finnes)?

b) Vis at det finnes en $c \geq 0$ slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin(2t)\,dt \leq c\left(\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$

for hver $x \in C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, og at $c = \sqrt{\pi}$ er den minste mulige.

c) La H være et Hilbert-rom (reelt eller komplekst) med indreprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ og en ortonormal basis $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Gitt et element $y \in H$, vis at avbildningen $x \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}}\langle x, e_j\rangle\langle e_j, y\rangle$ er en begrenset lineær funksjonal på H.