Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen: Mats Ehrnström, 735 917 44

Eksamen i TMA4145 Lineære metodar

Fredag, 16. august 2013
Tid: 09:00 – 13:00
Hjelpemiddel: Kode D
Sensur: Fredag, 6. september 2013

Ingen trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tilletne; kalkulator Citizen SR-270X (også *College*) eller Hewlett Packard HP30S. Kvar korrekt løyst oppgåve gir 10 poeng. I kvar oppgåve gir deloppgåver same poengtal, med unnatak av oppgåve 2 og 5, der siste deloppgåva gir eit ekstra poeng. *Alle svar skal motiverast grundig (bortsett frå i oppgåve 1).*

Oppgåve 1 *(Oversikt)*
For kvart av dei følgjande utsegna, avgjer om utsegna er korrekte eller galne (du treng ikkje gi noko grunngjeving).

(i) $\mathbb{R}^n$ er eit Hilbertrom ($n \geq 1$).

(ii) Matrisa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ er inverterbar.

(iii) Alle Banachrom er uendelegdimensjonale.

(iv) Ein lineær transformasjon mellom to normerte rom er avgrensa om og berre om den er kontinuerleg.

(v) For ei kvadratisk matrise $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ er basisen av løysningane til $\dot{x} = Ax$ $(n-1)$-dimensjonal.

(vi) Relasjonen $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ kallast parallellogramidentiteten.

(vii) For kvar mengde finnast det ein metrikk som gir mengda strukturen til eit metrisk rom.

(viii) Lipschitzkontinuerlege funksjonar er kontinuerlege.

(ix) Følgja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ av funksjonar $f_n\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergerar i $BC([0,1],\mathbb{R})$, rommet av avgrensande og kontinuerlege reelle funksjonar på intervallet $[0,1]$.

(x) l_p-rommane, $1 \leq p \leq \infty$, er refleksive.

Oppgåve 2 *(Avbildningar, funksjonsrom og Lipschitzkontinuitet)*

a) Bestem mengda av konstantar a slik at matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

definerer ein injektiv avbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. For slike a, er same avbildning også surjektiv?

b) Avgjer om funksjonen $f\colon x \mapsto \sin(1/x)$ høyrer til rommet $BC((0,1),\mathbb{R})$ av avgrensa og kontinuerlege reelle funksjonar på intervallet $(0,1)$.

c) Avgjer om funksjonen f fra b) er globalt Lipschitzkontinuerleg på $(0,1)$.

Oppgåve 3 *(Spektralteori, differensiallikningar)* La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Uttrykk A ved Jordan normalform TJT^{-1}.

b) Finn løysninga til startvilkårproblemet

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0,$$

for eit generelt startvilkår $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Oppgåve 4 *(Indreprodukter, minste avstand)*

a) Vis at norma $\|\cdot\|_\infty$ gitt ved $\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$ ikkje kan kome frå eit indreprodukt (norma er definert på alle begrensa og kontinuerlege reelle funksjonar).

b) I $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ med indreprodukt $\langle x, y\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt$, finn den minste avstanden mellom mengda $M = \operatorname{span}\{1, \mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{2it}\}$ og funksjonen x_0 gitt ved $x_0(t) = t$.

Oppgåve 5 *(Avgrensa lineære transformasjonar, Banach- og Hilbertromteori)*
For kvar av dei følgjande lineære transformasjonane, bestem operatornorma og gi eit eksempel på eit element der norma oppnår (det vil si, bestem verdien av $\|T\|$ og finn eit element $x \in X$ forskjellig frå 0 slik at $\|Tx\|_Y / \|x\|_X = \|T\|$, der $T\colon X \to Y$ er gitt i den respektive deloppgåva).

a) $T\colon l^1(\mathbb{R}) \to l^1(\mathbb{R})$ gitt ved

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

b) $T\colon L^2((-\pi, \pi), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$T(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x)\, dx.$$

c) $T\colon L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C}) \to L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ gitt ved

$$\mathcal{T}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(ix\xi)\, dx.$$

Oppgåve 6 *(Gram–Schmidt-ortonormalisering)*

a) Utfør Gram–Schmidt ortonormalisering på kolonnevektorane A_1, A_2 og A_3 til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Gi tilsvarande QR-dekomposisjon av matrisa A.

b) La $\{x_1, x_2, \ldots\}$ vere ei følgje av lineært uavhengige vektorar i eit indreproduktrom. Gi ein skikkeleg induktiv definisjon av vektorane $\{e_1, e_2, \ldots\}$ som blir konstruert i den vanlege Gram–Schmidt ortonormaliseringa og vis at $\{e_j\}_j$ verkeleg er ei ortonormal følgje som spenner ut same lukka lineære følgje som $\{x_j\}_j$.