Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen: Mats Ehrnström, 735 917 44

Eksamen i TMA4145 Lineære metodar

Onsdag, 5. desember, 2012
Tid: 09:00 – 13:00
Hjelpemiddel: Kode D
Sensur: Fredag, 4. januar, 2013

Ingen trykte eller handskrivne hjelpemiddel tillatt; kalkulator Citizen SR-270X (også *College*) eller Hewlett Packard HP30S. Alle oppgåver som er korrekt løyst gir 10 poeng. I kvar oppgåve gir deloppgåver likt antal poeng, unntatt oppgåve 2, 4 og 5, der siste deloppgåva gir eit ekstra poeng. Alle svar skal motiveres grundig (bortsett frå i oppgåve 1).

Oppgåve 1 *(Oversikt)*

For kvart av følgjande påstandar, avgjer om påstanden er korrekt eller gal (du treng ikkje å gi noko bevis).

(i) Kvart vektorrom inneheld eit nullelement.

(ii) $P_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$.

(iii) Matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar.

(iv) I eit normert rom er alle Cauchy-følgjer konvergente.

(v) $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ definerer ein ortonormal basis for $L_2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$, $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

(vi) $\mathbb{C}^n$ er dualen til $\mathbb{R}^n$.

(vii) Ein lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er inverterbar viss og berre viss $\ker(T) = \{0\}$.

(viii) Funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, er lokalt Lipschitzkontinuerleg.

(ix) Pytagoras setning, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ for alle $x \perp y$, held i indreproduktrom.

(x) Differensialoperatoren $1 + (\frac{d}{dx})^2$ er inverterbar på $C^\infty_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Oppgåve 2 *(Endeleg-dimensjonale lineære transformasjonar)*

a) Finn ei LU-faktorisering av

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Kva er $\ker(A)$, $\mathrm{ran}(A)$?

b) Bestem koordinatane $(x_1, x_2, x_3)_A$ til ein vilkårleg vektor $y = (y_1, y_2, y_3)$ i basisen $\{A_1, A_2, A_3\}$ gitt ved kolonnevektorane til A.

c) Utfør Gram–Schmidt-ortonormalisering på $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Oppgåve 3 *(Spektralteori, differensiallikningar)*

a) Uttrykk $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ på Jordan normalform TJT^{-1}.

b) Løys initial-verdiproblemet $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Oppgåve 4 *(Normerte rom, minimal avstand)*
La $M \subset X$ vere ei delmengde til eit normert rom $(X, \|\cdot\|)$, $x_0 \in X$. I følgjande tilfelle, rekn ut $\inf_{y\in M} \|x_0 - y\|$ og avgjer om det eksisterer ein unik $y_0 \in M$ slik at $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y\in M} \|x_0 - y\|$. Om dette er tilfellet, finn y_0.

a) $X = \mathbb{R}^3$ med norm $\|x\| = (\sum_{j=1}^3 x_j^2)^{1/2}$, $M = \mathrm{span}\{(1,1,0)\}$, $x_0 = (1,2,3)$.

b) $X = l_\infty(\mathbb{R})$ med norm $\|x\|_{l_\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$, $M = \{\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \colon \lim_{j\to\infty} x_j = 0\}$, $x_0 = \{\frac{j}{j+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

c) $X = L_2((0,1), \mathbb{R})$ med norm $\|x\| = (\int_0^1 |x(t)|^2\, dt)^{1/2}$, $M = \mathrm{span}\{1, t\}$, x_0 gitt ved $x_0(t) = t^2$.

Oppgåve 5 *(Hilbertrom)*
La $U \in B(H)$ vere ein unitær operator på eit komplekst Hilbertrom H, det vil seie ein begrensa lineær operator $H \to H$ slik at

$$UU^* = U^*U = \mathrm{Id}.$$

Vis at:

a) Alle eigenverdiar til U oppfyller $|\lambda| = 1$.

b) Hvis $(U - \lambda)x = 0$, så er $(U^* - \overline{\lambda})x = 0$.

c) Eigenrom til ulike eigenverdiar til U er ortogonale.

Oppgåve 6 *(Banachrom, isomorfismar)*
La $P(\mathbb{R})$ vere rommet av alle polynoma $p(x) = \sum_k a_k x^k$ (endelig summa) med reelle koeffisientar $a_0, a_1, \ldots$, med normen $\|p(x)\| = \max_k |a_k|$.

a) Finn ei Cauchy-følgje i $P(\mathbb{R})$ som ikkje konvergerer i $P(\mathbb{R})$.

b) Bestem kompletteringa ('completion') til $P(\mathbb{R})$, det vil seie, finn eit normert rom $\tilde{X}$ og eit Banachrom X slik at $P(\mathbb{R}) \cong \tilde{X} \overset{\text{tett}}{\subset} X$. Her indikerer '$\cong$' ein isometrisk isomorfi, det vil seie ein isomorfi mellom normerte rom.