Uke 45: Grafteori

Oskar Goldhahn

Høst 2024

Grafer

En *graf* er en mengde med noder

Grafer

En *graf* er en mengde med noder og en mengde med kanter mellom disse (uordnede par av noder); $G = \langle V, E \rangle$

Grafer

En *graf* er en mengde med noder og en mengde med kanter mellom disse (uordnede par av noder); $G = \langle V, E \rangle$

Brukes til å studere for eksempel sosiale nettverk og transportveier

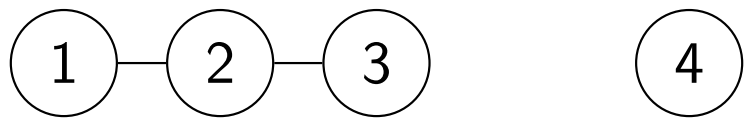
Fokuset er som regel på det store bildet

Representasjon

Grafer kan representeres som i definisjonen,

$$G = \langle \{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \rangle$$

med tegning,



eller med tabell;

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	0	0	0

Generaliseringer og Terminologi

Det vi kaller grafer kalles også *urettede grafer*

I *rettede* grafer har forbindelsene en retning

Generaliseringer og Terminologi

Det vi kaller grafer kalles også *urettede grafer*

I *rettede* grafer har forbindelsene en retning

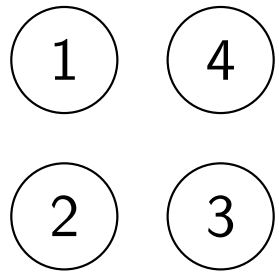
Multigrafer tillater flere kanter mellom samme par

Pseudografer tillater kanter fra en node til seg selv

Kaller ofte grafer som ikke er multi- eller pseudo-grafer *enkle* for å presisere

Noen familier av grafer

De tomme grafene uten kanter



De komplette grafene hvor alle mulige kanter er med

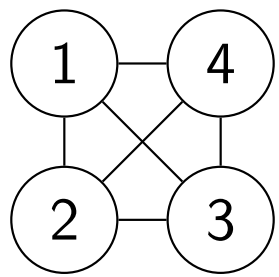
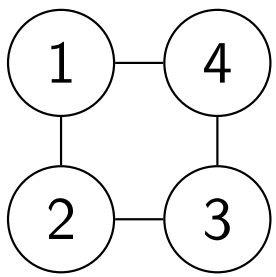


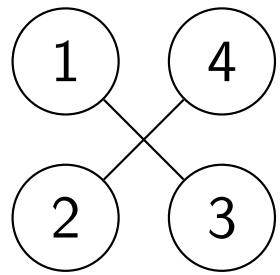
Figure: K_4, den komplette grafen på 4 noder

Komplement

Komplementet, $\overline{G}$, av en graf, G, er grafen hvor nøyaktig de motsatte kantene er med



(a) G



(b) $\overline{G}$

Grader av Noder

For en gitt graf er graden, $\deg(v)$, til en node, v, antall kanter med v som et av endepunktene

Hvis $deg(v) = k$ i G, og G har n noder, så er $deg(v)$ i $\overline{G}$ lik $n - k - 1$

Grader av Noder

For en gitt graf er graden, $\deg(v)$, til en node, v, antall kanter med v som et av endepunktene

Hvis $deg(v) = k$ i G, og G har n noder, så er $deg(v)$ i $\overline{G}$ lik $n - k - 1$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Grader av Noder

For en gitt graf er graden, $\deg(v)$, til en node, v, antall kanter med v som et av endepunktene

Hvis $deg(v) = k$ i G, og G har n noder, så er $deg(v)$ i $\overline{G}$ lik $n - k - 1$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Antall noder med odde grad er et partall

Isomorfi

Iso- (gresk: lik) morfi (gresk: form)

To ting er isomorfe hvis de har samme struktur

For grafer vil dette si at man kan gå fra den ene til den andre ved å dra rundt på noder og gi dem nytt navn

Isomorfi

Iso- (gresk: lik) morfi (gresk: form)

To ting er isomorfe hvis de har samme struktur

For grafer vil dette si at man kan gå fra den ene til den andre ved å dra rundt på noder og gi dem nytt navn

Mer formelt: Gitt to grafer $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ og $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ så er en bijektiv funksjon $f : V_1 \to V_2$ en isomorfi hvis v_1 og $v_2 \in V_1$ deler kant i G_1 hvis og bare hvis $f(v_1)$ og $f(v_2)$ deler kant i G_2

Bestemme isomorfi

For å vise at to grafer er isomorfe må man finne en isomorfi

Hvordan sjekke at de ikke er isomorfe?

Bestemme isomorfi

For å vise at to grafer er isomorfe må man finne en isomorfi

Hvordan sjekke at de ikke er isomorfe? Kan man gjøre det bedre enn å se på alle bijeksjonene?

Egenskaper som kun avhenger av struktur, dvs. deles av isomorfe grafer, kalles invarianter

Eksempler på invarianter

- $|V|$
- $|E|$
- Antall noder av grad 2

Bestemme isomorfi

For å vise at to grafer er isomorfe må man finne en isomorfi

Hvordan sjekke at de ikke er isomorfe? Kan man gjøre det bedre enn å se på alle bijeksjonene?

Egenskaper som kun avhenger av struktur, dvs. deles av isomorfe grafer, kalles invarianter

Eksempler på invarianter

- $|V|$
- $|E|$
- Antall noder av grad 2

For å vise at to grafer ikke er isomorfe er det nok å finne en invariant som kun én av dem har

Vi kjenner ikke til en effektiv beregnbar invariant som kun er lik for isomorfe grafer

Vandringer

Ofte er vi interessert i hva som skjer når man beveger seg langs flere kanter i en graf

En *vandring* eller *tur* i en graf er en følge med noder og kanter; $v_1 e_1 v_2 \dots v_k$, slik at e_i er en kant mellom v_i og v_{i+1}. I enkle grafer unnlater vi å skrive kantene

En *sti* er en vandring hvor alle nodene er forskjellige

Grafer hvor den fins en sti/vandring mellom alle ulike par av noder kalles *sammenhengende*

Vandringer

Ofte er vi interessert i hva som skjer når man beveger seg langs flere kanter i en graf

En *vandring* eller *tur* i en graf er en følge med noder og kanter; $v_1 e_1 v_2 \dots v_k$, slik at e_i er en kant mellom v_i og v_{i+1}. I enkle grafer unnlater vi å skrive kantene

En *sti* er en vandring hvor alle nodene er forskjellige

Grafer hvor den fins en sti/vandring mellom alle ulike par av noder kalles *sammenhengende*

Invariant: totalt antall stier av en gitt lengde

sykler

En *lukket* vandring er en vandring hvor $v_1 = v_k$. En *krets* er en lukket vandring med ingen gjentatte kanter. En *sykel* er en krets hvor kun første og siste node er like

Vi anser lukkede vandringer/kretser/sykler som like hvis de har samme rekkefølge, selv om de har ulike startnoder

Grafer uten sykler kalles *asykliske*. Hvis de er sammenhengende kalles de *trær*

sykler

En *lukket* vandring er en vandring hvor $v_1 = v_k$. En *krets* er en lukket vandring med ingen gjentatte kanter. En *sykel* er en krets hvor kun første og siste node er like

Vi anser lukkede vandringer/kretser/sykler som like hvis de har samme rekkefølge, selv om de har ulike startnoder

Grafer uten sykler kalles *asykliske*. Hvis de er sammenhengende kalles de *trær* Invariant: Antall sykler i grafen

Eulerveier

En *eulervei* er en vandring hvor alle kanter forekommer nøyaktig én gang

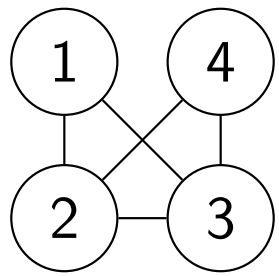


Figure: 2 1 3 4 2 3

Eulerveier

En *eulervei* er en vandring hvor alle kanter forekommer nøyaktig én gang

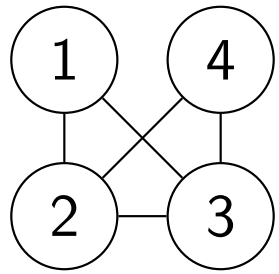


Figure: 2 1 3 4 2 3

En sammenhengende graf har en eulervei hvis og bare hvis det fins nøyaktig 0 eller 2 noder med odde grad

Eulerveier

En *eulervei* er en vandring hvor alle kanter forekommer nøyaktig én gang

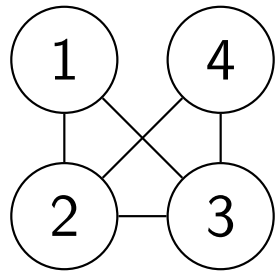


Figure: 2 1 3 4 2 3

En sammenhengende graf har en eulervei hvis og bare hvis det fins nøyaktig 0 eller 2 noder med odde grad

En eulerkrets er en eulervei som også er en krets. Hva kan du si om antall noder med odde grad i en graf med eulerkrets?

En *hamiltonsti* er en sti som inkluderer alle nodene i grafen

En *hamiltonkrets* er en krets som inkluderer alle nodene i grafen

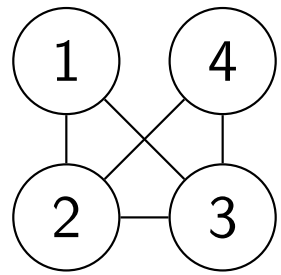


Figure: 2 1 3 4 2

Det er vanskelig å finne hamiltonkrets i praksis

Tangent: Å avgjøre om en graf har hamiltonkrets er *NP-komplett*. Dvs. at det er minst like vanskelig som alle andre ja/nei spørsmål hvor et ja-svar har et bevis som er lett å sjekke

Vektede grafer

I mange kontekster er det nyttig å gi kantene en ekstra tallverdi, f.eks. for å bestemme avstand. Disse grafene kalles *vektede grafer*

Problemer om navigasjon, korteste vei og nettverkshastighet kan beskrives som problemer om vektede grafer

Vektede grafer

I mange kontekster er det nyttig å gi kantene en ekstra tallverdi, f.eks. for å bestemme avstand. Disse grafene kalles *vektede grafer*

Problemer om navigasjon, korteste vei og nettverkshastighet kan beskrives som problemer om vektede grafer

Å avgjøre om den korteste hamiltonstien i en vektet graf er kortere enn en gitt lengde kalles "den handelsreisendes problem" og er også NP-komplett