Uke 37: Utsagnslogikk II

Bevis

Oskar Goldhahn

Høst 2024

Logisk Konsekvens

Hvis M er en mengde med utsagn, og F er en annen påstand, så er F en logisk konsekvens av M ($M \models F$), hvis F alltid er sann når alle utsagnene i M er det.

Logisk Konsekvens

Hvis M er en mengde med utsagn, og F er en annen påstand, så er F en logisk konsekvens av M ($M \models F$), hvis F alltid er sann når alle utsagnene i M er det.

Hvis $M_1 \models F$, så er $(M_1 \cup M_2) \models F$, så det er nok at det er en konsekvens av en delmengde

Bevis

Et bevis for en påstand gjøres fra en mengde med påstander, også kalt antakelser, M. Antakelsene kan for eksempel være aksiomer eller tidligere beviste påstander, men også ubeviste formodninger.

Bevis

Et bevis for en påstand gjøres fra en mengde med påstander, også kalt antakelser, M. Antakelsene kan for eksempel være aksiomer eller tidligere beviste påstander, men også ubeviste formodninger.

Et bevis er en følge med utsagn, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ slik at F_i er en konsekvens av M og de tidligere utsagnene:
$M \cup \{F_1, \ldots, F_{i-1}\} \models F_i$. Vi sier at at det er et bevis for F_n

Bevis

Et bevis for en påstand gjøres fra en mengde med påstander, også kalt antakelser, M. Antakelsene kan for eksempel være aksiomer eller tidligere beviste påstander, men også ubeviste formodninger.

Et bevis er en følge med utsagn, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ slik at F_i er en konsekvens av M og de tidligere utsagnene:
$M \cup \{F_1, \ldots, F_{i-1}\} \models F_i$. Vi sier at at det er et bevis for F_n

Det skal være lett å se at utsagnene er logiske konsekvenser. I formell logikk refererer man ofte til en av noen få navngitte typer konsekvens; f.eks.

- modus ponens $\{P, P \to Q\} \models Q$
- modus tollens $\{\neg Q, P \to Q\} \models \neg P$
- venstre eller $\{P\} \models P \vee Q$

Bevis

Et bevis for en påstand gjøres fra en mengde med påstander, også kalt antakelser, M. Antakelsene kan for eksempel være aksiomer eller tidligere beviste påstander, men også ubeviste formodninger.

Et bevis er en følge med utsagn, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ slik at F_i er en konsekvens av M og de tidligere utsagnene:
$M \cup \{F_1, \ldots, F_{i-1}\} \models F_i$. Vi sier at at det er et bevis for F_n

Det skal være lett å se at utsagnene er logiske konsekvenser. I formell logikk refererer man ofte til en av noen få navngitte typer konsekvens; f.eks.

- modus ponens $\{P, P \to Q\} \models Q$
- modus tollens $\{\neg Q, P \to Q\} \models \neg P$
- venstre eller $\{P\} \models P \vee Q$

I praksis hopper man ofte over steg og gir heller en forklaring på hvorfor ting er en konsekvens for å gjøre bevisene lettere å lese og å skrive. Det forventes ikke formelle bevis av dere

Antakelser

Formodninger er påstander vi tror er sanne med god grunn, men ikke har bevis for.

Antakelser

Formodninger er påstander vi tror er sanne med god grunn, men ikke har bevis for.

Vi ønsker i utgangspunktet å unngå å bruke formodninger som antakelser, men det er bedre enn å ikke ha noe bevis i det hele tatt

Bevis av formodninger som er mye brukt som antakelse gir stor anerkjennelse

Bevisteknikker

- Direkte Bevis
- Kontrapositivt bevis
- Motsigelsesbevis
- Eksistensbevis
- Bevis ved tilfeller
- Induksjonsbevis

Konnektivene vi har sett så langt, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$ er ikke tilstrekkelig for å ressonere særlig rundt påstander som "det fins et primtall som er et partall" eller "alle primtall større enn 2 er oddetall"

Konnektivene vi har sett så langt, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$ er ikke tilstrekkelig for å ressonere særlig rundt påstander som "det fins et primtall som er et partall" eller "alle primtall større enn 2 er oddetall"

Formalismen kommer senere i kapittel 13, men vi tar praktisk bevisføring allerede nå

Eksistensbevis

Eksistenspåstander er på formen "det fins x slik at ϕ", hvor ϕ kan inneholde x. Ofte brukes "$\exists x, \phi$" som en kortform av dette.

Man kan bevise dem ved å komme med et eksempel

Eksistensbevis

Eksistenspåstander er på formen "det fins x slik at ϕ", hvor ϕ kan inneholde x. Ofte brukes "$\exists x, \phi$" som en kortform av dette.

Man kan bevise dem ved å komme med et eksempel

Påstand: Det fins et partall som er et primtall

Bevis: 2 er et partall og 2 er et primtall, så det fins

Bevis for universelle påstander

Universelle påstander er på formen "for alle x så er ϕ sant", hvor ϕ kan inneholde x. Ofte brukes "$\forall x, \phi$" som en kortform av dette

Man kan bevise dem ved å jobbe med en generisk variabel x som man i utgangspunktet ikke vet noe om

Bevis for universelle påstander

Universelle påstander er på formen "for alle x så er ϕ sant", hvor ϕ kan inneholde x. Ofte brukes "$\forall x, \phi$" som en kortform av dette

Man kan bevise dem ved å jobbe med en generisk variabel x som man i utgangspunktet ikke vet noe om

Påstand: For alle heltall fins det et større heltall

Bevis: La x være et vilkårlig heltall, da er $x + 1$ et heltall og $x < x + 1$, så det fins et større heltall

Motbevis av universelle påstander

Man kan motbevise universelle påstander ved å finne et moteksempel

Motbevis av universelle påstander

Man kan motbevise universelle påstander ved å finne et moteksempel

Påstand: Ikke alle primtall er partall Bevis: 2 er et primtall som ikke er et partall, så det er et moteksempel

Motsigelsesbevis

I motsigelsesbevis starter man med å anta negasjonen av det man prøver å bevise, bruker den til å vise en motsigelse og konkluderer med at påstanden man antok var usann.

Gyldig fordi $\neg P \rightarrow \bot \equiv P$

Motsigelsesbevis

I motsigelsesbevis starter man med å anta negasjonen av det man prøver å bevise, bruker den til å vise en motsigelse og konkluderer med at påstanden man antok var usann.

Gyldig fordi $\neg P \rightarrow \bot \equiv P$

Påstand: Det fins uendelig mange primtall.

Bevisskisse:

1. La P være mengden med primtall. Anta at P er endelig
2. Vi finner et nytt primtall, p ikke i P
3. Da kan ikke P være mengden med primtall, så vi har en motsigelse
4. Siden vi fikk en motsigelse må antakelsen ha vært usann, så P er uendelig

Kontrapositivt Bevis

Når vi skal bevise $Q \to P$ hender det er lettere å vise $\neg P \to \neg Q$ enn direkte å vise det ved å anta Q og utlede P. Dette kalles kontrapositivt bevis

Kontrapositivt Bevis

Når vi skal bevise $Q \to P$ hender det er lettere å vise $\neg P \to \neg Q$ enn direkte å vise det ved å anta Q og utlede P. Dette kalles kontrapositivt bevis

Påstand: for alle oddetall n, hvis n^2 er et oddetall, så er n et oddetall.

Bevisidé: Lettere å se at hvis n er et partall, så er n^2 et partall

Direkte Bevis

Direkte bevis er bevis som unngår å bruke at $\neg\neg A \equiv A$.
Motsigelsesbevis og kontrapositivt bevis er ikke direkte.

Påstand: Alle tomme mengder er like

Bevis: La S og T være to vilkårlige tomme mengder. Alle elementene i S er også i T og motsatt, så de er like, følgelig er alle tomme mengder like

Bevis ved tilfeller

Ofte kan vi bevise ting ved å dele opp i tilfeller og vise det for alle tilfellene. Vi kan for eksempel vise noe for alle mengder ved å først vise det for alle endelige mengder og så vise det for alle uendelige mengder. Vi kan vise noe for alle heltall ved å vise det for alle positive tall, alle negative tall og for 0.

Bevis ved tilfeller

Ofte kan vi bevise ting ved å dele opp i tilfeller og vise det for alle tilfellene. Vi kan for eksempel vise noe for alle mengder ved å først vise det for alle endelige mengder og så vise det for alle uendelige mengder. Vi kan vise noe for alle heltall ved å vise det for alle positive tall, alle negative tall og for 0.

Påstand: Kvadratet av all heltall er ikke-negativt

Bevis: Kvadratet til et positivt tall er positivt. Kvadratet til et negativt tall er positivt. Kvadratet av 0 er 0. Ingen av disse er negative, så kvadratet av alle heltall er ikke-negativt.

Konstruktive Bevis

Bevis som bruker $\neg\neg A \equiv A$ kalles ofte ikke-konstruktive. Dette er fordi de lar deg bevise eksistenspåstander uten å komme med et eksempel

Konstruktive Bevis

Bevis som bruker $\neg\neg A \equiv A$ kalles ofte ikke-konstruktive. Dette er fordi de lar deg bevise eksistenspåstander uten å komme med et eksempel

Påstand: Det fins et naturlig tall som er større enn 3

Bevis: La M være mengden med naturlige tall mindre eller lik 3. Da er M endelig. Siden $\mathbb{N}$ er uendelig kan ikke $f : M \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$ være en bijeksjon. Men det er lett å se at f er injektiv, så f kan ikke være surjektiv. Da må det finnes $y \in \mathbb{N}$ som ikke blir truffet av f. Da er y et naturlig tall som er større enn 3.

Konstruktive Bevis

Bevis som bruker $\neg\neg A \equiv A$ kalles ofte ikke-konstruktive. Dette er fordi de lar deg bevise eksistenspåstander uten å komme med et eksempel

Påstand: Det fins et naturlig tall som er større enn 3

Bevis: La M være mengden med naturlige tall mindre eller lik 3. Da er M endelig. Siden $\mathbb{N}$ er uendelig kan ikke $f : M \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$ være en bijeksjon. Men det er lett å se at f er injektiv, så f kan ikke være surjektiv. Da må det finnes $y \in \mathbb{N}$ som ikke blir truffet av f. Da er y et naturlig tall som er større enn 3.

Som regel foretrekkes konstruktive bevis, siden de gir mer informasjon og ofte kan brukes til å lage en algoritme.