Uke 35: Relasjoner og Funksjoner

Oskar Goldhahn

Høst 2024

Relasjoner

En relasjon fra A til B er en delmengde av $A \times B$. dvs. en samling med ordnede par på formen $\langle a, b \rangle$ med $a \in A$ og $b \in B$.
Hvis $A = B$ sier vi også at den er en relasjon på A

Vi skriver også aRb i stedet for $\langle a, b \rangle \in R$

Relasjoner

En relasjon fra A til B er en delmengde av $A \times B$. dvs. en samling med ordnede par på formen $\langle a, b \rangle$ med $a \in A$ og $b \in B$.
Hvis $A = B$ sier vi også at den er en relasjon på A

Vi skriver også aRb i stedet for $\langle a, b \rangle \in R$

Intuisjonen er at hvis $\langle a, b \rangle \in R$ så har $\langle a, b \rangle$ en egenskap

Eksempel:

$=_S := \{\langle a, b \rangle \in S^2 \mid a = b\}$

$<_{\mathbb{N}} := \{\langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$

$\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$

S^2

Egenskaper

La R være en relasjon på S

R er *refleksiv* hvis $=_S \subseteq R$. Eller; xRx for alle $x \in S$

- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ på $\{1,2,3\}$

Egenskaper

La R være en relasjon på S

R er *refleksiv* hvis $=_S \subseteq R$. Eller; xRx for alle $x \in S$

- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ på $\{1,2,3\}$

R er *symmetrisk* hvis; dersom xRy så har vi også yRx.

- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$
- $\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a-b=2 \text{ eller } b-a=2\}$

Egenskaper

La R være en relasjon på S

R er *refleksiv* hvis $=_S \subseteq R$. Eller; xRx for alle $x \in S$

- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ på $\{1,2,3\}$

R er *symmetrisk* hvis; dersom xRy så har vi også yRx.

- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$
- $\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a-b=2 \text{ eller } b-a=2\}$

R er *transitiv* hvis; dersom xRy og yRz så har vi også xRz

- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
- $\{\langle A,B\rangle \in \mathcal{P}(S)^2 \mid A \subseteq B\}$

Egenskaper

La R være en relasjon på S

R er *refleksiv* hvis $=_S \subseteq R$. Eller; xRx for alle $x \in S$

- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ på $\{1,2,3\}$

R er *symmetrisk* hvis; dersom xRy så har vi også yRx.

- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$
- $\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a-b=2 \text{ eller } b-a=2\}$

R er *transitiv* hvis; dersom xRy og yRz så har vi også xRz

- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
- $\{\langle A,B\rangle \in \mathcal{P}(S)^2 \mid A \subseteq B\}$

R er en *ekvivalensrelasjon* hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv

- $=_S$
- $\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N} \mid$ a og b har like mange siffer i desimalnotasjon$\}$

Flere egenskaper

R er antisymmetrisk hvis; dersom xRy og yRx så er $x = y$

- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

Flere egenskaper

R er antisymmetrisk hvis; dersom xRy og yRx så er $x = y$

- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

R er irrefleksiv hvis det ikke fins x slik at xRx

Flere egenskaper

R er antisymmetrisk hvis; dersom xRy og yRx så er $x = y$

- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

R er irrefleksiv hvis det ikke fins x slik at xRx

R er en partiell ordning hvis den er refleksiv, transitiv og ikke-symmetrisk

- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$
- $\leq_{\mathbb{N}}$
- $\{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(S)^2 \mid A \subseteq B\}$

Flere egenskaper

R er antisymmetrisk hvis; dersom xRy og yRx så er $x = y$

- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

R er irrefleksiv hvis det ikke fins x slik at xRx

R er en partiell ordning hvis den er refleksiv, transitiv og ikke-symmetrisk

- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$
- $\leq_{\mathbb{N}}$
- $\{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(S)^2 \mid A \subseteq B\}$

R er en total ordning hvis den er partiell og for alle $x, y \in S$, så er enten xRy eller yRx

- $\leq_{\mathbb{N}}$
- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Funksjoner

En funksjon, f, fra D til V ($f : D \to V$) en en relasjon fra D til V slik at det fins nøyaktig ett element $\langle d, v \rangle \in f$ for hver $d \in D$. $f(d)$ er v i dette unike elementet

Funksjoner

En funksjon, f, fra D til V ($f : D \to V$) en en relasjon fra D til V slik at det fins nøyaktig ett element $\langle d, v \rangle \in f$ for hver $d \in D$.
$f(d)$ er v i dette unike elementet

Når vi definerer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ved $f(x) := \sqrt{x}$, så er
$f = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$

Egenskaper til funksjoner

La $f : D \to V$.

f er injektiv hvis $f(x) = f(y)$ kun når $x = y$

- $D = V = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$
- ikke $D = V = \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$

Egenskaper til funksjoner

La $f : D \to V$.

f er injektiv hvis $f(x) = f(y)$ kun når $x = y$

- $D = V = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$
- ikke $D = V = \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$

f er surjektiv hvis det for enhver $v \in V$ fins $d \in D$ slik at $f(d) = v$

- $D = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, $f(x) := x^2$
- ikke $D = V = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$

Egenskaper til funksjoner

La $f : D \to V$.

f er injektiv hvis $f(x) = f(y)$ kun når $x = y$

- $D = V = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$
- ikke $D = V = \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$

f er surjektiv hvis det for enhver $v \in V$ fins $d \in D$ slik at $f(d) = v$

- $D = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, $f(x) := x^2$
- ikke $D = V = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$

f er bijektiv hvis den er både injektiv og surjektiv

- $D = V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, $f(x) := x^2$

Inverser

Inversen, R^{-1}, til en relasjon R fra A til B er en relasjon fra B til A og defineres som følger

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \in B \times A \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

Inverser

Inversen, R^{-1}, til en relasjon R fra A til B er en relasjon fra B til A og defineres som følger

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \in B \times A \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

Dette fungerer også for funksjoner, men vi sier at inversen ikke eksisterer hvis det ikke er en funksjon

Bijektive funksjoner har alltid en invers, og den er også bijektiv. Hvorfor?

Inverser

Inversen, R^{-1}, til en relasjon R fra A til B er en relasjon fra B til A og defineres som følger

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \in B \times A \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

Dette fungerer også for funksjoner, men vi sier at inversen ikke eksisterer hvis det ikke er en funksjon

Bijektive funksjoner har alltid en invers, og den er også bijektiv. Hvorfor?

Hvis $f : D \to V$ har en invers f^{-1}, så har vi $f^{-1}(f(d)) = d$ for alle $d \in D$ og $f(f^{-1}(v)) = v$ for alle $v \in V$

Kardinalitet

Kardinalitet er måten vi måler størrelsen på mengder

Vi sier at A og B har samme kardinalitet ($|A| = |B|$) hvis det fins en bijeksjon mellom dem.

Kardinalitet

Kardinalitet er måten vi måler størrelsen på mengder

Vi sier at A og B har samme kardinalitet ($|A| = |B|$) hvis det fins en bijeksjon mellom dem.

Hvis A har samme kardinalitet som $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sier vi at A har kardinalitet n; $|A| = n$. Da er A endelig

Hvis A er endelig eller har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$, så er A tellbar