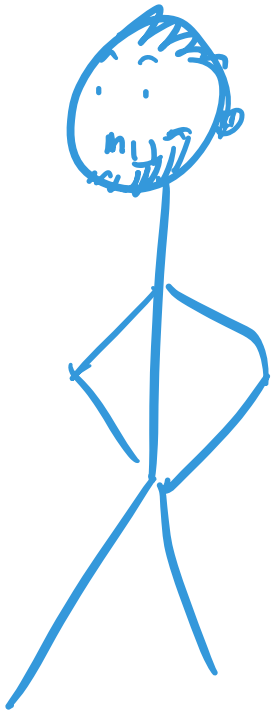
15/10-24

TMA4140- 10. forelesning

Kombinatorikk

Aslak Bakke Buan

October 27, 2023



JEG VALGTE Å GJENNOMFØRE DAGENS FORELESNING PÅ TAVLE, MEN HER ER NOTATENE JEG BASERTE MEG PÅ. -Hans

Innhold

Multiplikasjonsprinsippet

Permutasjoner - ordninger

Ordnede utvalg

Kombinasjoner

Multiplikasjonsprinsippet - uavhengige valg

Multiplikasjonsprinisppet. Anta at vi gjør t uavhengige valg, og at for valg i, er det n_i muligheter. Da er det totale antall muligheter

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_t = \prod_{i=1}^{t} n_i$$

Eksempel: La A være en mengde med 5 elementer, og B en mengde med 7 elementer. Da vil mengden $A \times B$ ha $5 \cdot 7 = 35$ elementer. Husk at elementene i $A \times B$ er ordnede par $\langle a, b \rangle$ der $a \in A$ og $b \in B$.

Multiplikasjonsprinsippet - eksempler

Eksempel:

La A være en mengde med 5 elementer. Hvor mange elmenter har $\mathcal{P}(A)$? (husk: dette er mengden av alle delmengder).

Når vi skal velge en delmengde av A, må vi for hvert av de 5 elementene velge om elementet skal være med i delmengden eller eller ikke. Altså har vi 5 uavhengige valg. Hvert med to muligheter. Altså har vi totalt $2^5 = 32$ valg. Dermed: 32 delmengder.

Hvor mange (binær) relasjoner finnes det på A? En binær relasjon på A er en delmengde av $A \times A$, som har $5 \cdot 5 = 25$ elementer. Da finnes altpå 2^{25} delmenger av $A \times A$, altså 2^{25} relasjoner.

(Og $2^{25} = 33\ 554\ 432$)

Permutasjoner - ordninger

En permutasjon er en måte å ordne en mengde på, altså velge en rekkefølge på elementene.

Hvis en mengde har n elementer, finnes det $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ ordninger.

Fordi: det første elementet kan velges på n måter, det andre på $(n-1)$ måter osv.

Eksempel: Mengden A med 5 elementer, kan altså ordnes på $5! = 120$ måter.

Se på mengden $A = \{a, b, c, d, e\}$. En ordning kan være *cdaeb*.

Vi kan definere en funksjon $f : A \to A$ ved å la
$f(a) = c \;\; f(b) = d \;\; f(c) = a \;\; f(d) = e \;\; f(e) = b$. Dette er en bijektiv funksjon fra A til A.

Det finnes like mange forskjellige bijektive funksjoner fra A til A, som forskjellige ordninger av A.

En bijektiv funksjon $A \to A$, for en vilkårlig mengde A, kalles derfor ofte en permutasjon av A.

Permutasjoner - eksempler

Eksempel: Hvis 8 personer skal plasseres rundt et bord med 8 stoler, kan det gjøres på $8! = 40320$ måter.

La oss anta at bordet er rundt, og vi sier at to plasseringer X og Y er *rotasjonsekvivalente* dersom man kan komme fra plassering X til Y ved at alle flytter seg t plasser med klokka, der t er et tall mellom 0 og 7. Dette blir en ekvivalensrelasjon på mengden av plasseringer (oppgave: hvorfor?). Hvor mange ekvivalensklasser finnes det?

Hver ekvivalensklasse har 8 elementer. Dermed må det finnes $8!/8 = 7! = 5040$ ekvivalensklasser.

Hvilken praktisk tolkning har dette antallet?

Ordnede utvalg

Gitt en mengde med n elementer. Et utvalg av $k \leq n$ av disse i en gitt rekkefølge, kalles et *ordnet utvalg*.

Det finnes $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-(k-1))$ ordnede utvalg med k elementer.

Hvorfor: Det første kan velges på n måter, det andre på $(n-1)$ måter, osv., element nummer k kan velges på $n-(k-1)$ måter.

Vi merker oss en elegant omskriving av $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-(k-1))$.

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

F.eks.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{3!}$$

Ordnede utvalg -eksempel

Eksempel: Hvor mange spillelister med 6 sanger kan du lage fra et "album" med 10 låter? Ingen låt mer enn én gang, og rekkefølge teller.

Svar: $\frac{10!}{4!} = 151\ 200$

Hva om det er én låt som *må* være med?

De fem andre låtene kan velges (av 9) på $\frac{9!}{4!}$ måter (inkl rekkefølge). Men favorittlåten kan "settes inn" i lista på 6 måter. Så det blir totalt

$$6 \cdot \frac{9!}{4!} = 90\ 720$$

Kombinasjoner -binomialkoeffisienten

La $0 \leq k \leq n$ være heltall.

Hvis A har n elementer. Hvor mange delmengder har da A med k elementer?

Svaret er gitt ved binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Begrunnelse

Hvorfor er det slik?
Vi har : Antall utvalg (med k elementer) $\cdot$ antall ordninger (av k elementer) = Antall ordnede utvalg av k elementer.

Vi har sett: Antall ordnede utvalg av k elementer er

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Og, vi har sett: Antall ordninger av k elementer er $k!$.

Dermend må antall utvalg med k elementer være:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Symmetri

Legg merke til at siden $k = (n - (n - k))$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

Så vi har altså, for eksempel:

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$$

Det betyr at hvis A har 6 elementer, er det 15 delmengder med 2 elementer og 15 med 4 elementer.

Oppgave: Finn en naturlig bijektiv avbildning mellom mengden av delmengder med 2 elementer, og mengden av delmengder med 4 elementer?

Eksempel

Hvor mange passord med 4 tegn, kan vi lage når vi velger tegn fra alfabetet $\{a, b, c, \ldots, y, z, 0, 1, 2, \ldots 9, !, \$, \%, \#\}$?

Løsning: Det er 26+10+4 = 40 mulige tegn. Så det finnes $40^4 = 2\ 560\ 000$ passord.

Hva om det må være minst én bokstav?

Løsning: Det fins $(14)^4 = 38\ 416$ passord uten bokstaver, så $(40)^4 - (14)^4 = 2\ 521\ 584$ passord med minst én bokstav.

Eksempel, forts.

Hva om det må være to bokstaver (ikke nødvendigvis forskjellige), ett spesialsymbol og ett tall?

Løsning: Spesialsymbolet kan velges på 4 måter, tallet på 10 måter, og de to bokstavene på $26^2 = 676$ måter.

Merk: i 26 av disse 676 måtene, er det to like boksatver.

Hvis vi har 4 ulike symboler, fins det $4! = 24$ forskjellige rekkefølger å skrive opp disse på.

Men hvis vi har fire symboler, der de to bokstavene er like, er det bare $4!/2 = 12$ forskjellige rekkefølger.

Vi får dermed: $(676 - 26) \cdot 10 \cdot 4 \cdot 24 = 624\ 000$ passord med fire ulike symboler, og $26 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 12 = 12\ 480$ passord der de to bokstavene er like.

Totalt altså: $624\ 000 + 12\ 480 = 636\ 480$ passord.