TMA4140 Predikatlogikk

Det følgende er adaptert fra Håvard Terlands forelesningsnotater for Elementær diskret matematikk V24 (Uke 5/Uke 10), med litt tillegg her og der. Dette notatet erstatter kap. 15 og 16 i Roger Antonsens *Logiske Metoder*, og leder inn i kap. 13 og 14. Vi dekker med andre ord dekker stoffet i en annen rekkefølge enn boken.

1. Predikatlogikk

Husk definisjonen av en refleksiv relasjon: En relasjon på A, si R, er en delmengde av $A \times A$ slik at $(x, x) \in R$ **for alle** x i A.

Veldig ofte i matematikk dukker det opp ord som "alle", og spesielt uttrykket "for alle", samt uttrykk som "det eksisterer". En relasjon er for eksempel *ikke* symmetrisk om det eksisterer et par (x, y) i relasjonen slik at (y, x) *ikke* er i relasjonen.

I predikatlogikk jobber vi med utsagn som "for alle" og "det eksisterer", ved å "utvide" utsagnslogikk med blant annet tegnene

- $\forall$ – for alle,
- $\exists$ – det eksisterer.

Vi kaller $\forall$ for universalkvantoren, og $\exists$ for eksistenskvantoren.

1.1 Terminologi og notasjon

Vi bytter ofte "for alle" ut med $\forall$. "For alle $x \in A$" kan da skrives $\forall x \in A$. Tilsvarende bytter vi ofte ut "det eksisterer" med $\exists$. Til slutt merker vi oss at "det eksisterer *nøyaktig én*" ofte skrives $\exists!$. For eksempel kan vi skrive

> $\exists! x \in \mathbb{N}$ slik at $x < 1$

for å uttrykke at det kun eksisterer ett naturlig tall som er mindre enn én.

> **Eksempel 1**
>
> La R være en relasjon på A.
>
> - R er refleksiv $\Leftrightarrow \forall x \in A$ er $(x, x) \in R$.
> - R er symmetrisk $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in A$ har vi $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.
> - R er *ikke* refleksiv $\Leftrightarrow \exists x \in A$ slik at $(x, x) \notin R$.

Vi har nå sett eksempler på hvordan kvantorene $\forall, \exists$ kan forenkle matematiske definisjoner og matematiske språk generelt.

Vi skal nå diskutere litt grundigere hvordan vi kan bruke kvantorene våre til å utvide matematisk logikk fra utsagnslogikk til *predikatlogikk*.

Betrakt setningen "$x \cdot 2$ er et partall". Er dette et *utsagn*? I så fall måtte setningen tatt en sannhetsverdi. Er den *sann* eller *usann*? Det avhenger av x! Tolker vi x som en ukjent, er setningen altså *ikke* et utsagn. Straks x er *bestemt*, får vi derimot et utsagn.

> ### Eksempel 2
>
> La $P(x) \coloneqq x \cdot 2$ *er et partall*. Da er $P(1)$ et utsagn, nemlig "$1 \cdot 2$ *er et partall*", og $P(1)$ er *sann*.

Er $P(x)$ fra eksempelet over sann for alle x? Det spørs hvilke verdier vi tillater at x tar; setter vi $x = 1/2$, eller $x = \pi$, eller $x =$ "Hei", får vi i de to første tilfellene at $P(x)$ blir usann, og i det siste tilfellet får vi noe vi ikke enkelt kan tolke. Det er derfor slik at vi alltid velger et *univers* å trekke verdier fra.

> ### Eksempel 3
>
> La universet være de naturlige tallene $\mathbb{N}$. Da er $\forall x\ P(x)$ *sann*.

Merk at $P(x)$ har én fri variabel, mens $\forall x\ P(x)$ har *ingen* frie variabler. Dermed er uttrykket $\forall x\ P(x)$ et *utsagn*!

> ### Definisjon 1
>
> Et uttrykk som blir et utsagn straks et gitt antall variabler er bestemt, kalles et *predikat*. Et predikat med k frie variabler kalles et predikat av *aritetet* k.

Merk: Definisjonen over lar oss tolke *utsagn* som *predikater av aritet* 0.

P fra de forrige eksemplene er et predikat av aritet 1.

> ### Eksempel 4
>
> La $Q(x, y) \coloneqq (x + y = 3)$, og la universet være $\mathbb{N}$ (slik at x og y er naturlige tall). Betrakt uttrykkene:
>
> - $\exists x\ Q(x, 1)$. Dette uttrykket er et utsagn med sannhetsverdi *sann*.
>   - Hva er verdien x som utsagnet sier at må eksistere?
> - $\exists x\ Q(x, y)$. Dette uttrykket er et predikat med aritet 1.
>   - Ser du hvorfor ariteten er 1 og ikke 2?
> - $\forall x\ \exists y\ Q(x, y)$. Dette uttrykket er et utsagn (ingen frie variabler) med sannhetsverdi *usann*.
>   - Kan du vise at utsagnet er usant ved å finne et moteksempel, det vil si en verdi for x slik at utsagnet ikke holder?
>   - Hvilken sannhetsverdi ville utsagnet tatt dersom vi i stedet lot universet være heltallene $\mathbb{Z}$?

1.2 Rekkefølge på kvantorer

La $S(x, y) \coloneqq x < y$, og la universet være de naturlige tallene $\mathbb{N}$.

(Test deg selv: Hvilke sannhetsverdier har $S(1, 3)$, $S(3, 1)$ og $S(2, 2)$? Svar i fotnote[1].)

> ### Eksempel 5
>
> Betrakt utsagnet $\forall x \, \exists y \, S(x, y)$. Vi leser dette som at "for alle x finnes det en y slik at $x < y$". Er dette utsagnet sant eller usant?
>
> Riktig: Det er *sant*, da vi alltid kan velge en y som "kommer etter" x. For eksempel kan vi sette at $y = x + 1$. Da får vi utsagnet $\forall x \, S(x, x + 1) \Leftrightarrow \forall x : x < x + 1$, som er *sant* for alle x.

Hva hvis vi bytter om rekkefølgen på kvantorene?

> ### Eksempel 6
>
> Betrakt utsagnet $\exists y \, \forall x \, S(x, y)$, som vi leser som at "det eksisterer en y slik at for alle x så er $x < y$ ". Er dette uttrykket sant?
>
> Riktig: Det er *usant* – vi kan ikke finne noen *enkelt*verdier for y som er større enn alle naturlige tall: Dersom vi hadde satt $y = \infty$, så ville vi hatt $y \notin U = \mathbb{N}$.
>
> (Men dersom universet var $U = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, så hadde uttrykket vært sant!)

Intuitivt, så handler forskjellen i kvantorenes rekkefølge om *unikhet* og *avhengighet*: Hvis jeg skriver $\exists y \, \forall x \, P(x, y)$, så krever jeg at det skal eksistere en *enkelt*verdi y slik at $P(x, y)$ blir sann *uansett* hva x er. Hvis jeg derimot skriver $\forall x \, \exists y \, P(x, y)$, så får jeg lov å velge en ny verdi y for hver verdi av x. Med andre ord tillater vi at y *avhenger av* x, slik som i eksempelet over, hvor vi satte $y(x) = x + 1$.

Merk hvordan dette også innebærer at den éne rekkefølgen leder til et *sterkere* utsagn enn den andre, for hvis vi har én verdi y slik at $P(x, y)$ er sann for alle x, så er det jo nødvendigvis også sant at for alle x, så er det en verdi y slik at $P(x, y)$ er sann. Men i motsatt retning så så vi i eksemplene over at sannhet ikke alltid følger: At hver verdi x kommer med en verdi y slik at utsagnet blir sant, impliserer ikke nødvendigvis at det finnes én "global" verdi for y som fungererer for alle x *samtidig*.

Dette er oppsummert i følgende teorem.

> ### Teorem 1
>
> La P være et predikat av aritet 2. Da har vi at
>
> $\exists y \, \forall x \, P(x, y) \Rightarrow \forall x \, \exists y \, P(x, y)$,
>
> og
>
> $\forall x \, \exists y \, P(x, y) \nRightarrow \exists y \, \forall x \, P(x, y)$.

Hvis utsagnene er *usanne*, får vi den omvendte implikasjonen (via negasjonsloven for implikasjoner fra utsagnslogikk).

> **Korollar 1**
>
> La P være et predikat av aritet 2. Da har vi at
>
> $\neg(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) \Rightarrow \neg(\exists y\ \forall x\ P(x,y))$,
>
> og
>
> $\neg(\exists y\ \forall x\ P(x,y)) \not\Rightarrow \neg(\forall x\ \exists y\ P(x,y))$.

Med andre ord, hvis vi ikke kan velge en y for hver x slik at utsagnet blir sant, så kan vi heller ikke finne en global y som fungerer for alle x samtidig; men hvis vi vet at det ikke finnes en global y, så sier det oss ikke noe som helst om hvorvidt det kan finnes en måte å tilegne hver x en y på slik at utsagnet blir sant.

> **Eksempel 7**
>
> Husk at vi definerte $S(x,y) \coloneqq x < y$.
>
> Er utsagnet $\forall y\ \exists x\ S(x,y)$ sant eller usant? Hva med $\exists x\ \forall y\ S(x,y)$? (Svar i fotnote.[2])

1.3 Kvantorer og negasjoner

La P være et predikat av aritet 1 over universet $U = \{1,2,3,4\}$. Det betyr at $P(1), P(2), P(3)$ og $P(4)$ er fire utsagn. Hvis vi skriver $\forall x\ P(x)$, så betyr det at utsagnet $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ er sant.

Hva hvis vi har at $\neg\forall x\ P(x)$? Ved å sette inn utsagnet over, får vi at $\neg(P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))$ må være sant, som via De Morgans lov gir oss $\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$. Men da har vi bare sagt at det finnes en x slik at $\neg P(x)$! Dermed kan vi skrive dette som $\exists x\ \neg P(x)$.

> **Teorem 2**
>
> La P være et predikat av aritet 1. Da har vi at
>
> $\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$,
>
> og
>
> $\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$.

Gjenta gjerne "utledningen" vi gjorde over med $\neg\exists x\ P(x)$, og sjekk at det du får stemmer overens med den andre setningen i teoremet!

Det følger at vi alltid kan bytte ut symbolet $\forall$ med en kombinasjon av $\exists$ og $\neg$, og vice versa.

> **Korollar 2**

La P være et predikat av aritet 1. Da har vi at

$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x\ \neg P(x))$,

og

$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \neg\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x\ \neg P(x))$.

Kvantorer og konnektiver

Kvantorene *distribuerer* forskjellig over konnektivene $\vee$ og $\wedge$. Vi viser dette via et par eksempler.

La oss begynne med ekistenskvantoren. La x være et naturlig tall, la predikatet $P(x)$ evaluere til *sant* dersom $x \in \mathbb{N}$ er et partall, og la $Q(x)$ evaluere til *sant* dersom x er et oddetall. Hvis man skriver $\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$, så vil vi da lese dette som "det finnes et naturlig tall x slik at x er et oddetall eller et partall". Dette er så klart sant, siden alle naturlige tall enten er oddetall eller partall. Vi ser at det vi også kunne skrevet $\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$, altså "det finnes et naturlig tall x slik at x er et partall *eller* det eksisterer et naturlig tall x slik at x er et oddetall". Vi kunne også gått andre veien, og vi har dermed en ekvivalens.

Men med "og"-konnektiven $\wedge$ fungerer ikke denne ekvivalensen lenger: Hvis jeg skriver $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x))$, så er dette sant, fordi det finnes både naturlige tall som er partall og naturlige tall som er oddetall. Men hvis jeg skriver $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$, så er dette usant, fordi det eksisterer ikke tall som *både* er partall og oddetall.

For universalkvantoren får vi den omvendte situasjonen. La universet være de naturlige tallene, og la $x \in A \subseteq \mathbb{N}$, altså er x tall hentet fra en delmengde av de naturlige tallene. La nå predikatet $P(x)$ være sann dersom $x \in \mathbb{N}$ er et primtall, og la $Q(x)$ være sann dersom x er et oddetall (som før). Hvis jeg skriver $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$, vil jeg da lese det som at "alle tall x er både primtall og oddetall". Hvis jeg lar delmengden A være mengden av alle primtall større enn (men ikke inkludert) 2, vil dette være oppfylt. Da er det også sant at $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$, altså at alle $x \in A$ er primtall, og alle $x \in A$ er oddetall. Vi ser at vi kunne også gått andre veien, og vi har en ekvivalens.

Men igjen bryter ekvivalensen sammen for den andre konnektiven, $\vee$. For å se dette, la predikatene P og Q være som over, men la delmengden A være lik $\{1, 2, 3\}$, og la $x \in A$. Da er utsagnet $\forall x\ P(x) \vee Q(x)$, som vi leser som "alle elementer i A er enten et primtall eller et oddetall" *sant*, for alle elementene i A er enten et oddetall (1), eller et primtall (2), eller begge deler (3). Men utsagnet $\forall P(x) \vee \forall x\ Q(x)$, som vi leser som "alle elementer i A er primtall *eller* alle elementer i A er oddetall" blir *usant*, fordi det finnes både et element som ikke er et primtall (1), og et element som ikke er et oddetall (2).

Det neste teoremet oppsummerer dette.

Teorem 3

La P og Q være predikater av aritet 1. Da har vi for eksistenskvantoren $\exists$ at

> $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$,
>
> $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \nLeftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$,
>
> og for universalkvantoren $\forall$ at
>
> $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$,
>
> $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \nLeftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

(Merk at moteksemplene vi ga i teksten over er nok til å bevise ikke-ekvivalensene, men at for å bevise *ekvivalensene* så må man gjøre litt mer jobb. Vi holder oss her til å presentere en intuisjon for hvorfor det virker sannsynlig at de holder, og behandler dem som "lov" heretter.)

2. Relasjoner og predikater

La A være en mengde. En delmengde av A^n kalles en n-ær relasjon over A, eller en relasjon av aritet n over A. En relasjon av aritet 2 kalles ofte en *binærrelasjon*, eller bare en "relasjon". Det vil si at når vi ikke spesifiserer ariteten, så betyr det stort sett at vi mener relasjoner av aritet 2. Når det er hensiktsmessig, vil vi spesifisere ariteten.

Relasjoner av aritet n og predikater av aritet n er tett koblet til hverandre. La R være en n-ær relasjon over A. Vi kan se på R som et predikat ved å definere $R(a_1, a_2, \ldots, a_n) \coloneqq ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R)$, altså at *predikatet* $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tar sannhetsverdi *sann* hvis og bare hvis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er i *relasjonen* R.

> **Eksempel 8**
>
> La mengden $A \subseteq \mathbb{Z}^3$ være definert som $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x + y = z\}$. Da er A en relasjon av aritet 3, og vi har for eksempel at $(1, 3, 4) \in A$, og at $(1, 1, 1) \notin A$.
>
> La nå $A(x, y, z) \coloneqq ((x, y, z) \in A) \Leftrightarrow (x + y = z)$. Da er $A(x, y, z)$ et predikat av aritet 3. Hvis vi lar universet være $\mathbb{Z}$, kan du finne en kvantisering av x, y og z slik at det resulterende utsagnet blir sant? (Svar i fotnote.[3])

Motsatt vei så kan vi for ethvert predikat av aritet n over universet U, definere en n-ær relasjon over U. La P være et slikt predikat. Vi definerer da relasjonen R_P som følger:

$$R_P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^n \mid P(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Med ord: Relasjonen R_P er mengden av tupler $(x_1, \ldots, x_n)$, hvor hver x_i er et element i U, slik at predikatet $P(x_1, \ldots, x_n)$ tar sannhetsverdi *sann*. (Husk at vi vanligvis ikke skriver eksplisitt at $P(\ldots) = true$ eller $P(\ldots) = false$, men lar heller bare $P(\ldots)$ og $\neg P(\ldots)$ stå for det samme.)

2.1 Tolkning av setninger

Husk at vi i utsangslogikk starter med noen atomære formler, for eksempel $A = \{P, Q, R\}$, og bygger opp logiske uttrykk fra dem. Gitt et uttrykk over A, får den da en sannhetsverdi straks vi har valgt en

tilordning.

Når vi har et predikatlogisk uttrykk, eller en *setning*, må vi på samme måte bestemme hva de ulike symbolene skal bety: Variabler som $x, y, \ldots$ trenger ikke å fortolkes, men de må bli gitt et univers U. Symbolene som representerer predikater må derimot tolkes eller konkretiseres, og det samme må funksjoner, dersom de oppstår i en predikatlogisk setning.

Eksempel 9

La $\varphi = \forall x \forall y \, (P(x, y) \to P(y, x))$.

Å *tolke* φ innebærer da å velge et univers U, samt et konkret predikat P. I praksis uttrykker vi ofte valget av P som en relasjon, i dette tilfellet av aritet 2.

La oss se på to tolkninger av φ, (hvor vi i begge tilfellene for enkelhetens skyld spesifiserer relasjonen R_P tilhørende predikatet P, heller enn P selv).

1. La $U = \mathbb{Z}$ og $R_P = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$. Er φ da sann eller usann? (Svar i fotnote.[4])
2. La $U = \{1, 2, 3\}$ og $R_P = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$. Er da φ sann eller usann? (Svar i fotnote.[5])

---

1. Sann, Usann, Usann ↩
2. Det første utsagnet er *usant*, fordi det finnes et moteksempel: Hvis $y = 0$, så eksisterer det ikke noe naturlig tall x slik at $x < y$, (da 0 allerede er det minste naturlige tallet). *Korollar 1* lar oss umiddelbart konkludere med at da må det andre utsagnet også være *usant*. Du kan se dette ved å legge merke til at moteksempelet vi nettopp ga er gyldig uansett om vi tillater at x avhenger av y eller ikke. ↩
3. $\forall x \forall y \exists z \; A(x, y, z)$: Uansett hva x og y er, så vil det finnes et heltall z slik at $x + y = z$. Tilsvarende har vi at $\forall x \forall z \exists y \; A(x, y, z)$ og $\forall y \forall z \exists x \; A(x, y, z)$ begge er sanne, og det samme er $\forall x \exists y \exists z \; A(x, y, z)$ og $\exists x \exists y \exists z \; A(x, y, z)$. (Disse utsagnene er faktisk implisert av det første – ser du hvorfor?)
   Hva med de andre mulighetene? Vel, for eksempel så må $\exists x \forall y \forall z \; A(x, y, z)$ være *usann*, fordi vi kan ikke finne én x slik at $x + y = z$ uansett hvilke heltall y og z er. Ser du hvorfor $\forall x \forall y \forall z \; A(x, y, z)$ og $\forall x \exists y \forall z \; A(x, y, z)$ også må være usanne? ↩
4. Usann: φ sier da at uansett hvilke to heltall du velger, så dersom $x \leq y$, så må $y \leq x$. Det er lett å komme opp med moteksempler til dette utsagnet – faktisk så vil alle valg av x og y slik at $x \neq y$ være gyldige moteksempler! ↩
5. Sann: Her er det bare tre elementer i relasjonen å sjekke, så dette kan enkelt gjøres for hånd: $(1, 2)$ er i R_P, og det er $(2, 1)$ også, så da er uttrykket $((1, 2) \in R_P) \to ((2, 1) \in R_P)$ sant; og tilsvarende for de to andre elementene. ↩