Utsagnslogikk

Håvard Utne Terland

September 6, 2024

Repetisjon

- Et utsagn er en påstand som har en sannhetsverdi, som vi ikke nødvendigvis kjenner til. Vi vil gjøre matematikk med utsagn.

Repetisjon

- Et utsagn er en påstand som har en sannhetsverdi, som vi ikke nødvendigvis kjenner til. Vi vil gjøre matematikk med utsagn.
- Vi lager et *formelt språk* av formler, hvor de enkleste formlene er variabler: $P, Q, R, S, \ldots$, og vi har konnektivene $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$. Vi bruker paranteser for å gjøre formlene entydige.

Repetisjon

- Et utsagn er en påstand som har en sannhetsverdi, som vi ikke nødvendigvis kjenner til. Vi vil gjøre matematikk med utsagn.
- Vi lager et *formelt språk* av formler, hvor de enkleste formlene er variabler: $P, Q, R, S, \ldots$, og vi har konnektivene $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$. Vi bruker paranteser for å gjøre formlene entydige.
- Atomære formler kan representere utsagn, da vil sammensatte formler representere nye utsagn.
- Vi kan visualisere alle mulige sannhetsverdier til en formel i en sannhetsverditabell.

Tilordninger

I en sannhetsverdi skriver vi for hver *mulige situasjon* en rad.

Hvordan kan vi definere *mulig situasjon* mer presist?

- Gitt en mengde utsagnslogiske variabler A, er en *tilordning* definert som en funksjon $t : A \to \{0, 1\}$.

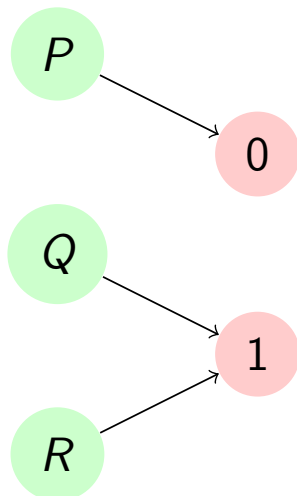
Tilordninger

I en sannhetsverdi skriver vi for hver *mulige situasjon* en rad.

Hvordan kan vi definere *mulig situasjon* mer presist?

- Gitt en mengde utsagnslogiske variabler A, er en *tilordning* definert som en funksjon $t : A \to \{0, 1\}$.
- Si her at $A = \{P, Q, R\}$. Da representerer funksjonen til høyre den blå raden i sannhetsverditabellen til venstre.

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



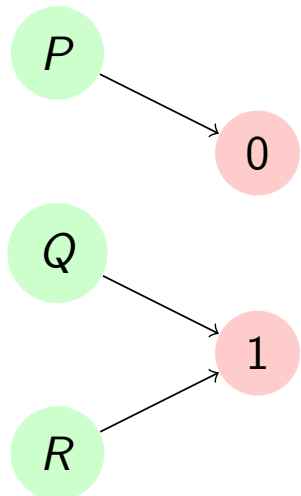
Tilordninger

I en sannhetsverdi skriver vi for hver *mulige situasjon* en rad.

Hvordan kan vi definere *mulig situasjon* mer presist?

- Gitt en mengde utsagnslogiske variabler A, er en *tilordning* definert som en funksjon $t : A \to \{0, 1\}$.
- Si her at $A = \{P, Q, R\}$. Da representerer funksjonen til høyre den blå raden i sannhetsverditabellen til venstre.

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



- En tilordning t bestemmer da sannhetsverdien til enhver sammmensatt formel hvor kun atomære variabler fra A opptrer. Vi sier at tilordningen t gir en *valuasjon* på alle sammensatte formler med variabler fra A.
- Enhver valuasjon kommer fra en tilordning.

Mer om implikasjon

- Vi så at hvis $P \to Q$ er sann, men P er usann, så lærer vi ingenting om Q:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Mer om implikasjon

- Vi så at hvis $P \to Q$ er sann, men P er usann, så lærer vi ingenting om Q:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Om derimot P er sann, lærer vi at Q faktisk må være sann:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vi sier at Q er en *logisk konsekvens* av $\{P \to Q, P\}$. Dette kan vi skrive som

$$\{P \to Q, P\} \models Q$$

Resonneringsregelen at Q er en konsekvens av $P \to Q$ og P kalles *modus ponens* og har vært kjent siden antikken.