TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 9

Høst 2024

1 La $k \leq n$ være naturlige tall. Illustrer påstandene under ved hjelp av Pascals trekant og argumenter for at de er sanne generelt.

a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

2 Catalantallene C_n teller antall måter man kan plassere n parantespar () i et uttrykk slik at enhver lukkende parantes ")" har en tilsvarende åpnende parantes "(" som kommer før den. For eksempel er $C_3 = 5$, fordi vi har 5 måter å sette sammen 3 parantespar på på denne måten:

$$()()() \quad (()()) \quad ((())) \quad)(()) \quad (())()$$

a) Gi en induktiv definisjon av språket av slike uttrykk, som vi kan kalle velparentetiserte uttrykk. (Hint: det bør være to induktive steg. Den ene av aritet 1 og den andre av aritet 2.)

b) Bevis ved hjelp av strukturell induksjon at Catalantallene tilfredsstiller rekurrensrelasjonen

$$C_0 = 1 \quad \text{og} \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

c) Beregn C_1, C_2 og C_3 ved hjelp av rekurrensrelasjonen.

d) Bevis ved induksjon at Catalantallene også tilfredsstiller rekurrensrelasjonen

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n.$$

e) Bevis at Catalantallene er lik

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

(Hint: her kan du få nytte av både rekurrensrelasjonen i forrige deloppgave óg fakultetformelen for binomialkoeffisienter.)

3 En studentforening skal arrangere en håndhilsingsøkt mellom nye studenter i anno 2019. De planlegger å plassere studentene på seter rundt et sirkulært bord, og at studentene så skal håndhilse med hverandre rundt bordet i omganger. Hver student håndhilser med én annen student av gangen, og alle studentene håndhilser samtidig. Studentforeningen tror neppe to studenter vil håndhilse dersom det medfører at to andre studenter må strekke seg over eller under dem for å håndhilse samtidig, men ønsker forøvrig at studentene skal håndhilse i så mange konfigurasjoner som mulig.

Gitt at et partall antall studenter møter opp for håndhilsingsøkten, i hvor mange forskjellige konfigurasjoner kan de håndhilse?

(Hint: her kan Catalantallene komme til nytte.)

4 Anta vi velger tilfeldige brøker $\frac{a}{b}$ hvor teller og nevner er heltall slik at $1 \leq a < b \leq n$. Med andre ord har vi $0 < \frac{a}{b} < 1$ og en øvre skranke n på størrelsen til teller og nevner.

a) Hvor mange mulige valg av a og b finnes det for en gitt n?

b) Hvor stor andel av brøkene vi kan danne er på redusert form?

c) Etterhvert som n blir uendelig stor så vet vi at summen

$$\frac{2}{n(n-1)}\sum_{b=2}^{n}\varphi(b) \quad \text{nærmer seg} \quad \frac{6}{\pi^2} \approx 0,608,$$

hvor φ er Eulers phi-funksjon. Hva sier dette om andelen vilkårlige positive heltallspar som er relativt primiske?