TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 4

Høst 2024

1 Ta stilling til om utrykkene under er tautologier eller motsigelser ved å først forenkle dem.

a) $((\neg p \vee \neg q) \wedge (r \wedge \neg r)) \wedge p$

b) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg(q \to q))$

c) $(p \to (q \to (r \vee \neg r)))$

2 La $P = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_6)$.

Finn en formel Q på formen

$$Q = (y_1 \to y_2) \wedge (y_3 \to y_4) \wedge (y_5 \to y_6)$$

slik at $P \iff Q$.

3

a) Bestem om p er en logisk konsekvens av premissene $q \to (p \wedge r)$ og q

b) La A, B være mengder. Finn en mengde C slik at $A = B$ er en logisk konsekvens av $A \cap C = B \cap C$.

4 La A være en vilkårlig mengde. Bruk bevis ved motsigelse til å vise *Cantors teorem*, nemlig at det ikke finnes en surjektiv funksjon

$$f \colon A \to \mathcal{P}(A).$$

5 På neste øving kommer det en oppgave hvor dere blir bedt om å bruke diverse bevisteknikker til å vise noen egenskaper ved irrasjonale tall. Vi skal derfor drøfte disse tallene her.

Husk at de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$ er definert som alle tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ der $a, b \in \mathbb{Z}$ og $b \neq 0$. De rasjonale tallene er en delmengde av de reelle tallene.

a) Vis at mengden irrasjonale tall er ikke-tom.

b) Vis at t er rasjonalt, hvor

$$t = 1,01010101\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \cdot 10^{-2i} = 1 + 1/100 + 1/10000 + \ldots$$

c) Vis at $x + x$ er rasjonalt hvis og bare hvis x er rasjonalt.

d) (Utfordring) Vis at

$$x = 1{,}101001000100001000001\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-\frac{(i+1)(i)}{2}}$$

er irrasjonalt, ved å bruke følgende strategi: Anta at $x = a/b$ for $a, b \in \mathbb{N}$. Da har vi $xb = a$, så xb er altså et naturlig tall. Vis så, ved elementær multiplikasjon, at xb slett ikke kan være et heltall.

Teori:

Diskusjonen vi har hatt over kan si oss noe interessant om tall, tellbarhet og beregnbarhet. Diskusjonen under er ikke en del av pensum, men et interessant eksempel på hvordan en del av tingene vi har diskutert kan brukes til å komme frem til teoretiske resultater i datavitenskap.

Ta stilling til Python-skriptet under.

```
print("1,",end ="");

for i in range(5):
        for j in range(i):
                print(0, end = "");
        print(1, end = "");
```

Dette skriptet skriver ut `1,101001000100001`, altså en første liten bit av desimalekspansjonen til x.

Det er tydelig at ved å erstatte `5` med et annet tall, kan vi estimere x med vilkårlig god presisjon. Vi kan dermed si at x er et beregnbart tall. Vi har altså funnet et irrasjonalt, beregnbart tall.

Det er ikke vanskelig å se at rasjonale tall er beregnbare. I praksis, for å bevise det, må man 'bare' implementere en algoritme for å beregne desimalekspansjonen til n/m for heltall $n, m \in \mathbb{Z}$.

Vi har altså funnet ut at rasjonale, pluss noen irrasjonale tall som x er beregnbare. Det finnes også algoritmer for å approksimere π og $\sqrt{2}$ som begge er irasjonale. Kan kanskje alle irrasjonale tall approksimeres med kreativ bruk av Python?

6 (Utfordring) Vis at det eksisterer et tall $y \in \mathbb{R}$ som ikke kan approksimeres av noe som helst Python-skript.