NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 3

Høst 2024

1 Vi har en vennegjeng bestående av tre personer Eva, Isak, og Noora som går på skole sammen.

La nå P, Q, R, og S være følgende utsagn:

- P: Hvis Eva består eksamen, består også Noora.
- Q: Eva eller Isak består eksamen.
- R: Hvis Isak består eksamen, består Eva.
- S: Noora eller Isak står på eksamen, men ikke begge to.

a) Avgjør hvilke av de følgende påstandene som er logiske konsekvenser av $P \wedge Q \wedge R$.

1. Hvis Eva eller Isak står på eksamen må Noora også stå.
2. Hvis Noora eller Isak står på eksamen må Eva også stå.
3. Hvis Noora eller Eva stryker, stryker også Isak.
4. Hvis Noora stryker, stryker også Isak.

b) Anta nå at P, Q, R, og S er sanne påstander. Hva kan vi konkludere?

1. Eva består eksamen.
2. Isak består eksamen.
3. Noora består eksamen.
4. Noora eller Isak består eksamen.

2 La x, y, z være utsagnsvariabler.

a) Finn alle valuasjoner slik at $(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ evalueres til sann.

b) Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med $(x \to y) \to z$ hvor du kun bruker de logiske konnektivene $\vee$ og $\neg$.

c) Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med $(x \wedge y) \wedge z$ hvor du kun bruker de logiske konnektivene $\vee$ og $\neg$.

d) Vis at $x \vee (y \wedge z)$ og $(x \vee y) \wedge z$ ikke er logisk ekvivalente.

3 Vi har sett at $P \wedge (Q \vee R)$ er ekvivalent med $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. Bruk denne logiske ekvivalensen til å rettferdiggjøre at $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ for alle mengder A, B, C.

4 'Denne setningen har fem ord.'

a) Hva er sannhetsverdien til denne påstanden?

b) Skriv ned negasjonen til påstanden. Hva er sannhetsverdien til negasjonen?

5 La $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \ldots \neg x_n\}$ være en mengde utsagnssvariabler samt deres negasjoner.

Utrykk på formen $(a \vee b \vee c)$ hvor $a, b, c \in X$ alle er ulike spiller en viktig rolle i datavitenskapen.

Betrakt for eksempel

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Dette utrykket er tilfredstilt for alle sannhetsverdier av x_1, x_2, x_3 utenom $x_1 = 0, x_2 = 0$ og $x_3 = 1$.

Vi skal her drøfte konjunksjoner av utrykk på formen over.

La a_i, b_i, c_i være tre elementer av X, for alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vi krever at a_i, b_i, c_i er ulike, og at de ingen av dem er lik negasjonen til noen av de to andre. La $P_i = (a_i \vee b_i \vee c_i)$. Kravene våre tilsier da at nøyaktig tre forskjellige utsagnsvariabler opptrer i hver P_i, enten med en negasjon foran eller ikke.

a) Hvor mange valuasjoner på $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eksisterer det?

b) Finn antallet valuasjoner på $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ hvor P_i evalueres til usann.

c) La nå $k = 7$. Betrakt utrykket

$$P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7$$

Finn et øvre estimat på antallet valuasjoner hvor P evalueres til usann. Hva sier dette om det nedre antallet valuasjoner hvor P er tilfredstilt?

Teori:

La a_i, b_i, c_i være tre ulike elementer i X, for alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Betrakt utrykket

$$P = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

Det er et åpent spørsmål i datavitenskap om det eksisterer en algoritme som raskt kjenner igjen om det finnes en valuasjon v av $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ slik at $v(P) = 1$. Dette algoritmiske spørsmålet er nemlig såkalt NP-komplett, et begrep en kan lære mer om i for eksempel emnet Algoritmer og Datastrukturer (TDT4120).