NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret matematikk

Plenumsregning 2

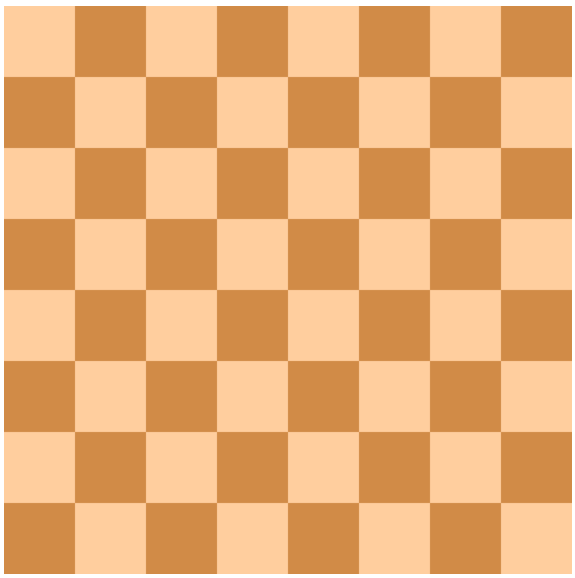
Høst 2024

1 La $A = \{0, 1, 2, 3\}$ og $M = \mathcal{P}(A)$.

a) Da gir $\subseteq$ en partiell ordning på M. Tegn det korresponderende hassediagrammet.

b) La R være relasjonen på M gitt ved $X \sim Y$ når $X \cup Y = A$. Hvilke egenskaper har denne relasjonen?

2 La $A = \{\langle i, j\rangle \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$ notere rutene på et sjakkbrett, hvor



tallparet $\langle 1, 1\rangle$ peker til ruten nederst i venstre hjørne og tallparet $\langle 1, 8\rangle$ peker til ruten nederst i høyre hjørne.

La R være relasjonen på A gitt ved at en knekt/hest kan bevege seg fra den ene ruten til den andre på ett trekk, gitt et ellers tomt brett. Husk at en knekt beveger seg to felt i én retning + ett felt i en ortogonal retning. Eksempelvis vil $\langle 1, 1\rangle \sim \langle 2, 3\rangle$ og $\langle 1, 1\rangle \sim \langle 3, 2\rangle$.

a) Forklar hvorfor R ikke er transitiv.

> **Teori:**
>
> Gitt en relasjon R på A, så definerer vi den **transitive tillukningen** $\text{Trans}(R)$ til å være relasjonen på A gitt av
>
> - Hvis $\langle i, j\rangle \in R$ så er $\langle i, j\rangle \in \text{Trans}(R)$
> - Hvis $\langle i, j\rangle \in \text{Trans}(R)$ og $\langle j, k\rangle \in \text{Trans}(R)$, så er $\langle i, k\rangle \in \text{Trans}(R)$
>
> Altså er $\text{Trans}(R)$ den minste relasjonen som inneholder R som også er transitiv.

b) Vis at $\text{Trans}(R)$ er en ekvivalensrelasjon.

c) Avgjør ekvivalensklassene til Trans(R).

3 Betrakt en vilkårlig funksjon $f\colon D \to V$.

D kalles gjerne *definisjonsområdet* til f, og V kalles gjerne *verdiområdet* til f.

Bildemengden til f er en delmengde av verdiområdet, bestående av de elementene i V som f "treffer".

a) Gi en presis definisjon av bildemengden til en funksjon $f\colon D \to V$.

La $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være gitt ved $f(x) = x + 1$. La $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være gitt ved $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$, funksjonen som beregner $x/2$ rundet ned til nærmeste naturlige tall.

b) Finn bildemengden til g.

c) Finn bildemengden til $f \circ g$, funksjonen definert av $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

> **Teori:**
>
> Gitt en funksjon $h : A \to B$ så kaller vi en funksjon $k : B \to A$ en **venstre invers** til h dersom likningen
>
> $$k(h(x)) = x$$
>
> gjelder for alle x i definisjonsområdet til h. Tilsvarende kaller vi k en **høyre invers** til h dersom likningen
>
> $$h(k(y)) = y$$
>
> gjelder for alle y i verdiområdet til h.
>
> En funksjon h har en venstre invers hvis og bare hvis h er en injeksjon, og h har en høyre invers hvis og bare hvis h er en surjeksjon.

d) Gi en høyre invers til g.

e) Gi en venstre invers til f.

4 Gitt funksjoner $f : A \to B$ og $g : B \to C$, bevis følgende.

a) Dersom $g \circ f$ er injektiv så er f injektiv.

b) Dersom $g \circ f$ er injektiv og f er surjektiv, så er g injektiv.

c) Dersom to av funksjonene i mengden

$$\{f, g, (g \circ f)\}$$

er bijeksjoner, så er alle funksjonene i mengden bijeksjoner.

5 Denne oppgaven handler om tellbare og ikke-tellbare mengder.

a) Gitt to tellbare mengder A og B, vis at unionen $A \cup B$ også er tellbar.

En bitstrøm er en uendelig sekvens på formen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ der $b_i \in \{0, 1\}$. Vi sier bitstrømmen **omsider forblir** 0 dersom det finnes et tall $n \in \mathbb{N}$ slik at for alle $j > n$ så er $b_j = 0$. La $\mathcal{B}$ være mengden av bitstrømmer som omsider forblir 0.

b) Vis at $\mathcal{B}$ er tellbar.

Vi betraktet over mengden av bitstrømmer som omsider forblir 0. Vi kan også betrakte mengden $\mathcal{B}^\infty$ av vilkårlige bitstrømmer, altså bitstrømmer som ikke nødvendigvis omsider forblir 0.

c) Vis ved diagonalisering at $\mathcal{B}^\infty$ ikke er tellbar.

d) Kan du gi en forklaring på hvordan c) medfører at $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ikke er tellbar?