TMA4140 Diskret matematikk

Plenumsregning 1

Høst 2024

1 La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

a) Finn $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$.

b) Vi har universet vårt $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Hva blir da $A \cap \overline{B}$?

Vi skal nå utforske delmengder av A.

c) Er $\{1\}$ en delmengde av A?

d) Er $\emptyset$ en delmengde av A?

e) La $C = \{\{1\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, 4, \emptyset, \{\{2\}\}, A\}$
Regn ut $\{S \in C \mid S \subseteq A\}$

f) Hvor mange delmengder av A med tre elementer finnes det?

g) Beskriv alle delmengdene av A.

Mengden av alle delmengder av en mengde X skrives $\mathcal{P}(X)$, og kalles potensmengden til X. Formelt kan vi si at $\mathcal{P}(X) = \{S \mid S \subseteq X\}$.

h) Beskriv $\mathcal{P}(A)$.

Vi skal nå koble det vi har sett om delmengder og potensmengder til relasjoner på mengder.

i) Beskriv $A \times A$

j) Hvor mange elementer finnes det i $\mathcal{P}(A \times A)$?

k) Hvor mange binærrelasjoner finnes det på A?

l) Finn alle relasjonene på $A \cap B$.

Teori:

For å løse andre del av oppgave 1 trenger vi begrepet om potensmengder. Potensmengden av X er mengden av alle delmengder av X. For eksempel har vi $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Merk at vi har 4 delmengder. Vi kan enten inkludere ingen av elementene, inkludere kun 1, inkludere kun 2 eller inkludere både 1 og 2. Hvis X er en endelig mengde med n elementer, altså $|X| = n$, får vi 2^n forskjellige delmengder av X. Dette er fordi en delmengde av X bygges ved å ta n forskjellige binære valg (for hvert element må vi velge om det skal med eller ikke i delmengden vår). Å gjøre n slike binære valg gir oss 2^n muligheter totalt. Formelt kan vi da skrive $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Husk også at en relasjon fra A til B er definert som en delmengde av $A \times B$. Med en relasjon *på* en mengde A mener vi en relasjon fra A til A, altså en delmengde av $A \times A$. Merk at med potensmengdespråket kan vi ekvivalent si at en relasjon på A er et element i $\mathcal{P}(A \times A)$. Hvis vi ønsker å telle hvor mange relasjoner det er på en slik

mengde A kan vi derfor telle størrelsen av $\mathcal{P}(A \times A)$ og slik få svaret.

2 Vi skal her se på noen ligninger for mengder.

Bevis at *De Morgans* lover holder for mengder, altså:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c) La A og B være som i oppgave 1. Regn ut $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Bevis at de følgende *distributive lover* gjelder:

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Forklar hvorfor $A \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Tips: Du trenger bare finne ett konkret tilfelle hvor ligningen ikke holder.

3 Vi skal her se på delmengder av de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, så vi setter altså $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

a) Vi kan beskrive partallene som mengden $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Hvordan kan vi tolke $\overline{A}$?

La nå $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$ og $C = \{7x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

b) Beskriv $B \cap C$

c) Beskriv $\overline{A} \cap B$

d) Bruk mengdebygger-teknikken til å beskrive tallene i $\mathbb{N}$ som kan deles på 7 minst to ganger som en delmengde av C.

e) Vis at $\{15x \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq B$.

f) Beskriv mengden av alle primtall.

4 La $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, 2, 3\}$

Ta stilling til sannhetsverdien til følgende utsagn.

a) $2 \in M$

b) $1 \in M$

c) $\{1\} \subseteq M$

d) $\{\{1\}, 3\} \subseteq M$

e) $\{1\} \in M$

f) $\{\{1\}\} \in M$

g) $\{1, 2\} \cap M = \{1, 2\}$

h) $M = \mathcal{P}(\{1,2\}) \cup \{2,3\}$

5 Vi skal her se på et kjent problem i mengdelære, nemlig spørsmålet om det gir mening å snakke om en "mengde av alle mengder."

Vi begynner med en analogi. La oss si at det arbeider én, og bare én, frisør i den spanske byen Sevilla. La oss nå, tilsynelatende logisk nok, foreslå at **frisøren klipper akkurat de beboerne av byen som ikke klipper håret sitt selv**. Hvem klipper da frisørens hår? Vel, om han klipper det selv skal han ikke klippes av frisøren, men han er jo frisøren, så han har derfor ikke anledning til å klippe det selv.

Om han derimot ikke klipper håret sitt selv, skal han klippes av frisøren. Siden han selv *er* frisøren, kan heller ikke dette gjennomføres. Dermed er påstanden at "frisøren klipper alle som ikke klipper seg selv" umulig å tilfredstille, og vi har dermed et paradoks for hende.

Dette problemet er en variant av Russels paradoks, som vi nå skal se på.

a) Kan du foreslå en endring i arbeidsbeskrivelsen til frisøren som unngår paradokset?

b) La oss si at det eksisterer en mengde av alle mengder X. Denne mengden ville da inneholdt alle andre mengder, så for eksempel $\{1,2,3\} \in X$, $\mathbb{N} \in X$. La oss nå definere $R = \{M \in X | M \notin M\}$, altså vi tar alle mengdene som ikke inneholder seg selv, og dette vil være en delmengde av X.

Vi spør oss nå om R inneholder seg selv. Vis at $R \in R$ fører til $R \notin R$. Vis at dette fører til et paradoks, gitt definisjonen av R.