Uke 34: Mengder

Oskar Goldhahn

Høst 2024

Mengder

En mengde er en samling av matematiske objekter (f.eks tall)

Eksempler:

- $\mathbb{Z}$ - Mengden med alle heltall
- $\mathbb{R}$ - Mengden med alle reelle tall
- $\mathbb{N}$ - Mengden med alle naturlige tall. Heltall som ikke er negative

Mengder

En mengde er en samling av matematiske objekter (f.eks tall)

Eksempler:

- $\mathbb{Z}$ - Mengden med alle heltall
- $\mathbb{R}$ - Mengden med alle reelle tall
- $\mathbb{N}$ - Mengden med alle naturlige tall. Heltall som ikke er negative
- $\emptyset$, eller $\{\}$ - Den tomme mengden

Mengder

En mengde er en samling av matematiske objekter (f.eks tall)

Eksempler:

- $\mathbb{Z}$ - Mengden med alle heltall
- $\mathbb{R}$ - Mengden med alle reelle tall
- $\mathbb{N}$ - Mengden med alle naturlige tall. Heltall som ikke er negative
- $\emptyset$, eller $\{\}$ - Den tomme mengden

$x \in M$ leses som "x er **et element i** M" eller "M **inneholder** x".

$x \notin M$ betyr at x ikke er et element i M.

Vi bruker krøllparantes til å beskrive mengder. $\{1, 2, 4\}$ er mengden med nøyaktig 1, 2 og 4 som elementer.

To mengder er like, $A = B$, hvis de har nøyaktig de samme elementene. Hvis de er ulike skriver vi $A \neq B$.

Merk at

$$\{1, 3\} = \{3, 1\} = \{1, 1, 3\}$$

Rekkefølge og gjentakelser har ingenting å si.

Mengder er også matematiske objekter, så $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ er også en mengde, og den er ulik $\{1, 2, 3\}$.

Delmengder

Vi kan også sammenligne ulike mengder

A er en **delmengde** av B hvis alle element i A også er i B

$$A \subseteq B$$

Eksempel:

$$\{3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

Hva kan vi si hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$?

Mengdebygging

Hvordan kan vi beskrive mengden av alle heltall større enn 10?

For større mengder er det upraktisk eller umulig å list opp alle elementene. Vi kan skrive $\{11, 12, 13, \ldots\}$, men da er vi ikke presise.

Mengdebygging

Hvordan kan vi beskrive mengden av alle heltall større enn 10?

For større mengder er det upraktisk eller umulig å list opp alle elementene. Vi kan skrive $\{11, 12, 13, \ldots\}$, men da er vi ikke presise.

Skriver heller $\{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < x\}$. Leses som "mengden av heltall som er større enn 10".

Eksempel:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{Z} \mid \tfrac{x}{2} \in \mathbb{Z}\} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y \text{ for en } y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \mid x \text{ er et partall}\} \\ &= \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Mengdebygging

Hvordan kan vi beskrive mengden av alle heltall større enn 10?

For større mengder er det upraktisk eller umulig å list opp alle elementene. Vi kan skrive $\{11, 12, 13, \ldots\}$, men da er vi ikke presise.

Skriver heller $\{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < x\}$. Leses som "mengden av heltall som er større enn 10".

Eksempel:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{Z} \mid \tfrac{x}{2} \in \mathbb{Z}\} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y \text{ for en } y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \mid x \text{ er et partall}\} \\ &= \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Tangent: Når man bruker mengdebygging uten $\in$ er det mulig å støte på paradoks, for eksempel med $\{M \mid M \notin M\}$
Mer om det i oppgave 5 til øvingsforelesningen

Mengdeoperasjoner

Union: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$

Mengdeoperasjoner

Union: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$

Snitt: $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$

Differanse: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Eksempel:
La $A = \{1, 4, 8\}$ og $B = \{2, 4, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$$
$$A \cap B = \{4, 8\}$$
$$A \setminus B = \{1\}$$

Universell Mengde og Komplement

Ofte er vi kun interesserte i å snakke om delmengder av en gitt mengde, U. Da kaller vi U et univers og komplementet til en mengde A er:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Eksempel med $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

$$\overline{\{2, 4, 6, 8\}} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$\overline{\{2, 3, 5, 7\}} = \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

Kartesisk Produkt

Vi kan danne ordnede par eller tupler av matematiske objekter slik at rekkefølgen har noe å si og vi tillater gjentakelser

$\langle 1, 2 \rangle$ er paret med 1 som første element og 2 som andre

$\langle 1, 4, 9 \rangle$ er 3-tuppelen med 1 som første element og 4 som andre og 9 som tredje

Vi definerer kartesisk produkt som mengder av par eller tupler:

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ og } b \in B\}$$
$$A \times B \times C = \{\langle a, b, c \rangle \mid a \in A \text{ og } b \in B, \text{ og } c \in C\} \text{ osv.}$$

$$\{1, 2\} \times \{5, 6, 7\} = \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 7 \rangle\}$$

A^2 er en kortform av $A \times A$ og delmengder av A^2 kalles **relasjoner** på A

Potensmengder

Vi så tidligere på mengder av mengder

En vanlig måte å bygge disse på er ved å bruke potensmengder. Potensmengden til A er mengden av alle delmengder til A:

$$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$$

Eksempel:

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$