NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 9

Høst 2023

Nederst i dokumentet finnes en teori-del med et fullstendig eksempel på et språk og en modell.

1 La $\mathcal{S}$ være språket som består av tre konstantsymboler a, b, c, ingen funksjonssymboler og to relasjonsymboler U, V begge av aritet 1.

Vi definerer to modeller av $\mathcal{S}$. La oss først si at $\mathcal{M}$ har domene $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ hvor $a^{\mathcal{M}} = 1, b^{\mathcal{M}} = 2, c^{\mathcal{M}} = 3$. Videre må vi gi en tolkning av U og V som delmengder av $\mathcal{D}$. Vi kan her velge helt fritt, og vi velger følgende to delmengder:

$$U^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$$
$$V^{\mathcal{M}} = \{2\}$$

Så skal vi se på en annen modell $\mathcal{N}$ av samme språk, med domene $\mathcal{E} = \{00, 01, 10\}$. Vi tolker konstantsymbolene $a^{\mathcal{N}} = 00$, $b^{\mathcal{N}} = 01$, $c^{\mathcal{N}} = 10$. Til slutt må vi tolke U og V som delmengder av $\mathcal{E}$.

$$U^{\mathcal{N}} = \{00, 10\}$$
$$V^{\mathcal{N}} = \{01\}$$

Under er en liste lukkede formler i $\mathcal{S}$. For hver av dem, ta stilling til om den tolkes som sann i hver av de to modellene $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$.

De to siste formlene illustrerer at rekkefølgen på kvantorene er veldig viktig.

a) $U(a)$
b) $U(c)$
c) $\forall x U(x)$
d) $\exists x(U(x) \wedge V(x))$.
e) $\forall x(U(x) \vee V(x))$.
f) $\forall x \exists y((U(x) \wedge U(y)) \vee \neg(U(x) \vee U(y)))$
g) $\exists y \forall x((U(x) \wedge U(y)) \vee \neg(U(x) \vee U(y)))$

2 La $\mathcal{S}$ være språket med konstantsymboler $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (altså et konstansymbol for hvert naturlig tall), et funksjonssymbol NESTE med aritet 1 og to relasjonssymboler PAR (aritet 1) og LIK (aritet 2) .

Vi skal i denne oppgaven se på to ulike modeller av $\mathcal{S}$.

Vi begynner med å definere en modell $\mathcal{N}$. Vi sier at domene til $\mathcal{N}$ er de naturlige tallene $\mathbb{N}$ og at vi tolker a_i som tallet i. Videre tolker vi NESTE som funksjonen som legger til 1 til et tall, altså $\text{NESTE}^{\mathcal{N}}(x) = x + 1$.

Til slutt må vi tolke relasjonssymbolene LIK og PAR. Vi velger å tolke LIK som likhet. Altså tolker vi

$$\text{LIK}^{\mathcal{N}} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$$

Til slutt tolker vi PAR som mengden av partall. Altså tolker vi

$$\text{PAR}^{\mathcal{N}} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

a) Tolk det lukkede termet $(\text{NESTE}(a_9))$ i modellen $\mathcal{N}$. Hvilket tall får vi?

b) Tolk den lukkede formelen $\text{LIK}(a_7, a_2)$ i $\mathcal{N}$. Hvilken sannhetsverdi får vi?

c) Er $\text{LIK}(\text{NESTE}(\text{NESTE}(a_1)), a_3)$ sann in $\mathcal{N}$?

d) Ta stilling til hver av påstandene under. Forklar kort hvorfor de alle er sanne i $\mathcal{N}$.

- $\varphi_0 = \forall x \text{LIK}(x, x)$
- $\varphi_1 = \forall x \forall y(\text{LIK}(x, y) \to \text{LIK}(y, x))$
- $\varphi_2 = \forall x \forall y \forall z((\text{LIK}(x, y) \wedge \text{LIK}(y, z)) \to \text{LIK}(x, z))$

e) Påstanden under er sann i $\mathcal{N}$. Hva betyr den?

- $\varphi_3 = \forall x \neg \text{LIK}(x, \text{NESTE}(x))$

f) Hva betyr følgende påstander i $\mathcal{N}$? Er påstandene sanne?

- $\varphi_4 = \forall x(\text{PAR}(x) \to \neg\text{PAR}(\text{NESTE}(x)))$
- $\varphi_5 = \forall x(\neg\text{PAR}(x) \to \text{PAR}(\text{NESTE}(x)))$

g) Vi skal nå se på en annen modell $\mathcal{K}$. La domenet til $\mathcal{K}$ være $\{0, 1, 2\}$ og la oss si at a_i tolkes som $i \,\%\, 3$. Videre tolker vi $\text{NESTE}^{\mathcal{K}}(x) = (x + 1) \,\%\, 3$. Igjen tolker vi LIK som likhet. Vi venter litt med å definere hvordan vi vil tolke PAR.

h) Tolk det lukkete termet a_5 i $\mathcal{K}$.

i) Tolk det lukkede termet $\text{NESTE}(a_5)$ i $\mathcal{K}$.

j) Finn en formel i $\mathcal{S}$ som er sann i $\mathcal{K}$ men usann i $\mathcal{N}$.

k) Er det mulig å finne en tolkning $\text{PAR}^{\mathcal{K}}$ slik at $\varphi_4 \wedge \varphi_5$ er sann i $\mathcal{K}$?

l) (Utfordring) Finn en endelig modell av

$$\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$$

(altså finn en modell med en endelig mengde som domene, hvor påstanden over er sann)

Teori:

Denne plenumsregningen handler om førsteordens logikk. Fordi det er mange begreper å holde styr på samtidig, samler vi, oppsummerer og repeterer noen av ideene her.

Da vi arbeidet med utsagnslogikk så vi på den ene siden på *formelle* utrykk på formen for eksempel $P \vee Q$, og på andre siden så vi på valuasjoner hvor disse utrykkene får tilordnet en sannhetsverdi. Vi diskuterte valuasjoner som tilfredstiller visse formler, og spurte oss om i noen tilfeller om vi kan si noe om hva som er sant i *alle* valuasjoner. I førsteordenslogikk skal vi på tilsvarende vis både se på språk (abstraksjoner) på den ene siden og modeller (konkretiseringer) på den andre siden.

Vi spesifierer et *språk* $\mathcal{S}$ ved å spesifisere valgfrie konstantsymboler, funksjonssymboler og relasjonssymboler. I tillegg spesifiserer vi for funksjonssymbolene og relasjonssymbolene en aritet.

En *modell* $\mathcal{M}$ av $\mathcal{S}$ må da inneholde en tolkning av alle disse symbolene. Formelt sier vi at $\mathcal{M}$ består av et domene $\mathcal{D}$ slik at hvert av konstantsymbolene i $\mathcal{S}$ 'lever' i $\mathcal{D}$. Tar man et vilkårlig konstantsymbol x må man altså ha en tolkning av x, som vi skriver $x^{\mathcal{M}}$, og dette må være et element i $\mathcal{D}$. Skriftlig kan vi altså skrive $x^{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}$. Vi må også ha en tolkning av funksjonssymbolene og relasjonssymbolene i $\mathcal{S}$. La f være et funksjonssymbol av aritet 1. Da må $f^{\mathcal{M}}$ være en funksjon fra $\mathcal{D}$ til $\mathcal{D}$. Ariteten måler hvor mange 'input' funksjonen tar. Et funksjonssymbol med aritet 2 ville da i $\mathcal{M}$ bli tolket som en funksjon fra $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ til $\mathcal{D}$. La nå R være et relasjonssymbol i $\mathcal{S}$ med aritet n. I en modell $\mathcal{M}$ tolkes dette som en delmengde av $\mathcal{D}^n$. Vi er mest vant til tilfellet $n = 2$: Relasjonssymboler av aritet 2 tolkes som binærrelasjoner på domenet til modellen vår, altså delmengder av $\mathcal{D}^2$. Et relasjonssymboler av aritet 1 tolkes som delmengder av $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$.

En slik modell $\mathcal{M}$ vil også induktivt kunne gi oss tolkninger av alle lukkede termer. Om f for eksempel er et funksjonssymbol av aritet 1 i $\mathcal{S}$, og a et konstantsymbol i $\mathcal{S}$, vil $f(f(a))$ være en lukket term i $\mathcal{S}$, med tolkning i $\mathcal{M}$ lik $f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(a^{\mathcal{M}}))$. Gitt et vilkårlig lukket term t i $\mathcal{S}$ sier vi at $t^{\mathcal{M}}$ er tolkningen av t i M.

På samme måte som lukkede termer kan tolkes i modeller kan lukkede formler tolkes. Gitt et relasjonssymbol R, si av aritet 2, i $\mathcal{S}$ og to lukkede termer s, t vil $R(s, t)$ tolkes som sann om $\langle s^{\mathcal{M}}, t^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Vi går nå gjennom et eksempel. Vi definerer et språk $\mathcal{S}$. La $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_7$ være konstansymboler og f et funksjonsymbol med aritet 1 og U et relasjonssymbol med aritet 1.

Betrakt modellen $\mathcal{M}$ med domene $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ slik at $a_i^{\mathcal{M}} = i$. Vi tolker $f^{\mathcal{M}}$ slik at

$$f^{\mathcal{M}}(a) = a + 1 \ \% \ 8$$

Altså for eksempel $f^{\mathcal{M}}(3) = 4$ og $f^{\mathcal{M}}(7) = 0$.

Til slutt tolker vi U som delmengden $\{0,1,2,3\}$ altså for å være presis

$$U^{\mathcal{M}} = \{0,1,2,3\}$$

Vi kan nå ta stilling til ulike påstander i språket $\mathcal{S}$ og spørre oss om de er oppfylt eller ikke i modellen $\mathcal{M}$.

For eksempel kan vi spørre om modellen vår tilfredstiller $U(a_3)$. I modellen vår tolkes a_3 som tallet 3 og U tolkes som $\{0,1,2,3\}$. Siden denne mengden inneholder 3 tolkes påstanden som sann. $U(a_5)$ tolkes derimot som usann.

Under følger noen andre påstander.

$$\exists x U(x) \tag{1}$$
$$\forall x U(f(x)) \tag{2}$$
$$\forall x(U(x) \to U(f(x))) \tag{3}$$
$$\exists x(U(x) \wedge \neg U(f(x))) \tag{4}$$
$$\forall x(U(x) \vee U(f(f(f(f(x)))))) \tag{5}$$

Den første påstanden kan vi lese som 'det eksisterer en x slik at $U(x)$ er sann'. Dette i modellen vår sant, fordi vi kan velge for eksempel $x = a_0$ og da vil $U(a_0)$ i modellen vår tolkes som påstanden $0 \in \{0,1,2,3\}$ som jo er sann.

Neste påstand leser vi som 'for alle x har vi $U(f(x))$'. Denne påstanden er ikke sann i modellen vår. Vi kan se at denne påstanden ikke er sann fordi i modellen vår kan vi i domenet har tallet 5 som av tolkningen til f blir sendt til tallet 6, som jo ikke ligger i tolkningen av U. Helt formelt kan vi bestemme at påstanden ikke er sann i modellen vår ved å for eksempel la $x = a_5$. Da tolkes utsagnet $U(f(a_5))$ i modellen vår som $f^{\mathcal{M}}(a_5^{\mathcal{M}}) \in U^{\mathcal{M}}$ altså $6 \in \{0,1,2,3\}$ som er usant. Vi ser at det fort kan bli tungvint å formelt sjekk selv enkle utsagn på denne måten. Å forstå hvordan formalitetene fungerer lar oss senere bruke intuisjon.

Tredje påstand er usann. Påstanden sier at en implikasjon skal gjelde i alle tilfeller. For å motbevise en implikasjon må vi finne et tilfelle hvor venstresiden er sann men høyresiden usann. Velg $x = a_3$. Da har vi $U(a_3)$ sann i modellen vår, men $U(f(a_3))$ er usann i modellen vår.

Fjerde påstand er sann. Vi kan se at den er ekvivalent til negasjonen av påstand 3, uten at vi skal bevise dette grundig.

Den siste påstanden krever litt jobb å analysere. Vi skal sjekke at noe er sant for alle x. Vi velger da først en vilkårlig $x = a_i$. Altså er $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Da er påstanden, når den blir tolket i modellen vår, at for en slik vilkårlig $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ har vi at

$$i \in \{0,1,2,3\} \vee f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(i)))) \in \{0,1,2,3\}$$

Vi vet at $f^{\mathcal{M}}(i) = i + 1 \ \% \ 8$. Så $f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(i)) = i + 2 \ \% \ 8$ og videre kan vi se at

$$f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(i)))) = i + 4 \ \% \ 8$$

Vi kan da forenkle utrykket over til påstanden under, som vi kaller P.

$$P: \quad i \in \{0, 1, 2, 3\} \vee (i + 4 \ \% \ 8) \in \{0, 1, 2, 3\}$$

P er altså ekvivalent med at påstand 4 i listen over gjelder i modellen $\mathcal{M}$.

Si nå at $i \notin \{0, 1, 2, 3\}$. Da har vi $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Da får vi at $i+4 \in \{8, 9, 10, 11\}$. Tar vi disse tallene mod 8 får vi $\{0, 1, 2, 3\}$. Altså har vi $i \notin \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow i+4 \ \% \ 8 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Men denne påstanden er ekvivalent med P. Vi har dermed vist at den siste påstanden i listen gjelder i $\mathcal{M}$.