NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 6

Høst 2023

1 La $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Anta at x ikke har en faktor a slik at

$$\sqrt{x} \geq a \geq 2$$

Vis at x er et primtall.

2 Bruk resultatet fra forrige oppgave til å sjekke om $x = 101$ og $x = 105$ er primtall.

3 En viktig ingrediens i Euclids algoritme er at $\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$ for alle heltall $a, b \in \mathbb{Z}$. Bevis denne likheten.

4 Definer gcd av flere tall rekursivt, slik at vi for eksempel kan utrykke største felles faktor av tallene $8, 6$ og 12 som $\gcd(8, 6, 12)$.

5 La $\{f_i\}$ være fibonacci-tallene ($f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, \dots$).

a) Vis at $\gcd(f_{i+1}, f_i) = 1$ for alle $i \geq 0$.

b) Vis at $\gcd(f_{i+2}, f_i) = 1$ for alle $i \geq 0$.

c) Vis at $f_{i+j} = f_i f_{j+1} + f_j f_{i-1}$ for $i, j \geq 1$ (Hint: Hold j fast og bruk induksjon på i.)

d) Vis at $f_i \mid f_{i \cdot k}$ for alle $i, k \geq 0$. Konkluder at

$$i \mid j \implies f_i \mid f_j$$

e) (Utfordring) Vis at $\gcd(f_i, f_j)$ er et Fibonacci-tall for alle i, j.