NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 4

Høst 2023

1 La A være et alfabet.

Vi ser på operasjonen $\sigma\colon A^* \to A^*$ som reverserer ord, altså for eksempel $\sigma(a_1a_2a_3) = a_3a_2a_1$ for $a_1, a_2, a_3 \in A$ og generelt $\sigma(a_1a_2a_3 \dots a_n) = a_na_{n-1}a_{n-2} \dots a_1$ for $a_i \in A$.

> **Teori:**
>
> Vi sier at et ord S over A er et palindrom hvis $\sigma(S) = S$. La $A = \{a, b, c\}$. Da er for eksempel $aba, c, cc, acca$ og $abccba$ alle eksempler på palindromer. ab og caa er to ord som *ikke* er palindromer.

a) Finn en rekursiv definisjon av σ, og bevis at σ reverserer ord.

b) Vis at $\sigma(ST) = \sigma(T)\sigma(S)$ for alle ord S og T.

c) Vis ved strukruell induksjon på S at $S\sigma(S)$ er et palindrom for alle ord S.

d) La $\{P_1, P_2, \dots, P_i\}$ være i palindromer over A. Vis at

$$\sigma(P_1P_2 \dots P_i) = P_iP_{i-1} \dots P_1$$

2

a) La x, y være utsagnsvariabler. Finn alle valuasjoner slik at $(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ evalueres til sann.

b) Gi en rekursiv definisjon av valuasjon av utrykk bestående av utsagnsvariabler sammensatt med $\wedge, \vee$ og $\neg$.

c) Vis at $\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_n)$ er logisk ekvivalent med $(\neg x_1) \vee (\neg x_2) \vee (\neg x_3) \vee \dots \vee (\neg x_n)$.

3 Vi har sett at $(P \wedge (Q \vee R))$ er ekvivalent med $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. Bruk denne logiske ekvivalensen til å rettferdiggjøre at $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ for alle mengder A, B, C.

4 'Denne setningen har fem ord.'

a) Hva er sannhetsverdien til denne påstanden?

b) Skriv ned negasjonen til påstanden. Hva er sannhetsverdien til negasjonen?

5 La $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \ldots \neg x_n\}$ være en mengde utsagnssvariabler samt deres negasjoner.

Utrykk på formen $(a \vee b \vee c)$ hvor $a, b, c \in X$ alle er ulike spiller en viktig rolle i datavitenskapen.

Betrakt for eksempel

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Dette utrykket er tilfredstilt for alle sannhetsverdier av x_1, x_2, x_3 utenom $x_1 = 0, x_2 = 0$ og $x_3 = 1$.

Vi skal her drøfte konjunksjoner av utrykk på formen over.

La a_i, b_i, c_i være tre elementer av X, for alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vi krever at a_i, b_i, c_i er ulike, og at de ingen av dem er lik negasjonen til noen av de to andre. La $P_i = (a_i \vee b_i \vee c_i)$. Kravene våre tilsier da at nøyaktig tre forskjellige utsagnsvariabler opptrer i hver P_i, enten med en negasjon foran eller ikke.

a) Hvor mange valuasjoner på $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eksisterer det?

b) Finn antallet valuasjoner på $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ hvor P_i evalueres til usann.

c) La nå $k = 7$. Betrakt utrykket

$$P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7$$

Finn et øvre estimat på antallet valuasjoner hvor P evalueres til usann. Hva sier dette om det nedre antallet valuasjoner hvor P er tilfredstilt?

Teori:

La a_i, b_i, c_i være tre ulike elementer i X, for alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Betrakt utrykket

$$P = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

Det er et åpent spørsmål i datavitenskap om det eksisterer en algoritme som raskt kjenner igjen om det finnes en valuasjon v av $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ slik at $v(P) = 1$. Dette algoritmiske spørsmålet er nemlig såkalt NP-komplett, et begrep en kan lære mer om i for eksempel emnet Algoritmer og Datastrukturer (TDT4120) her på NTNU.