NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 3

Høst 2023

1 Vis ved induksjon at $21 \mid 4^{n+1} + 5^{2n-1}$ for $n \geq 1$.

2 La A være en endelig mengde med n elementer, altså $|X| = n$. Bevis med induksjon at $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

3 Bruk (sterk) induksjon til å vise at alle naturlige tall større enn 1 har en primtallsfaktorisering.

4 Vi skal her se på Fibonacci-tallene. Vi definerer de første to første Fibonacci-tallene $f_0 = 0, f_1 = 1$. Videre lar vi $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ hvor $i \geq 2$.

a) Vis at hvert tredje Fibonacci-tall er et partall.

b) Vis at $f_{2n} = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}$

5 Vi skal her se på en induktivt definert heltallsfølge $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. La $a_0 = 3$, $a_1 = -2$ og $a_k = a_{k-1} \cdot a_{k-2}$ for alle $k \geq 2$.

a) Regn ut a_4.

b) Beskriv eksplisitt mengden $A_{<0} = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i < 0\}$.

c) Vis ved induksjon at primtallsfaktoriseringen til a_i inneholder f_{i-1} faktorer av 3 for alle $i \geq 2$, hvor f_i er det i'te Fibonnaci-tallet (se plenumsregningnotatet for definisjon av Fibonnaci-tallene).

d) Uttrykk primtallsfaktoriseringen til a_i ved hjelp av Fibonnaci-tallene, for alle $i \geq j$ for tilstrekkelig stor (valgfri) $j \in \mathbb{N}$.

6 La $\mathcal{B}$ være mengden (endelige) bitstrenger. La $|s|$ stå for lengden til en bitstreng $s \in B$.

a) Vis ved induksjon at det finnes 2^n bitstrenger av lengde n, for $n \geq 0$.

b) Vis at det finnes flere bitstrenger av lengde nøyaktig n enn bitstrenger av lengde mindre enn n. Hva sier dette om komprimering av filer?

La $f \colon \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ være definert ved at $f(s)$ er antallet ganger 11 forekommer i s. For eksempel er $f(111) = 2$.

c) Vis ved (strukturell) induksjon at $f(s) \leq |s| - 1$ for alle bitstrenger s av lengde minst 1.

Vi skal nå induktivt definere en mengde $C \subseteq \mathcal{B}$. Vi tar basismengden $\{\Lambda, 1\}$. Vi definerer så induktivt C til å være tillukningen av basismengden under følgende to operasjoner: Vi krever at $s \in C$ gir $s01 \in C$, og at $s \in C$ gir $s0 \in C$.

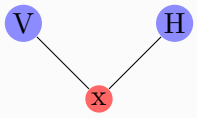
d) Vis ved strukturell induksjon at $f(s) = 0$ for alle $s \in C$.

e) La $K = \{b \in \mathcal{B} \mid f(b) = 0\}$. Vis at $C = K$.

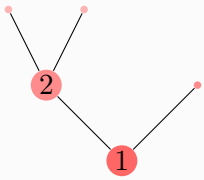
Teori:

Neste oppgave handler om binære trær. Vi definerer dem induktivt, på følgende måte.

Velg først en mengde A. Nodene i treet vårt skal ta verdier fra A. Vi krever at mengden $\mathcal{BT}(A)$ av binære trær over A er den minste mengden som opfyller at $() \in \mathcal{BT}(A)$ og hvis $x \in A$ og $H, V \in \mathcal{BT}(A)$ så har vi $(V, x, H) \in \mathcal{BT}(A)$. I siste fall betrakter vi x som en node eller punkt i treet, som har en forgreining til treet V (som vi tegner på venstre side) og en forgreining til treet H, som vi tegner på høyre side. Vi kan illustrere dette generelt som under.

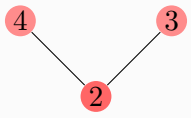


Vi kan for eksempel la $x = 1$, $V = ((), 2, ())$ og $H = ()$. Da får vi treet $(((), 2, ()), 1, ()) \in \mathcal{BT}(\mathbb{N})$. Dette treet kan vi tegne som under:

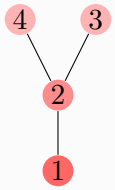


Dette treet har 2 noder, nummerert 1 og 2. De ekstra punktene teller vi ikke som noder, og vi kan helt fint tegne treet vårt uten dem.

I så fall vil for eksempel treet $T = (((), 3, ()), 2, ((), 4, ())) \in \mathcal{BT}(\mathbb{N})$ gi oss tegningen



og treet $(T, 1, ()) \in \mathcal{BT}(\mathbb{N})$ kunne gi oss tegningen



I treet over sier vi at node 1 har ett barn, og node 2 har to barn. Vi er spesielt interressert i binære trær der alle noder har enten 0 eller 2 barn. Vi kaller slike trær fulle binære trær.

Vi kan rekursivt definere delmengden $\mathcal{FBT}(A) \subseteq \mathcal{BT}(A)$ av fulle biære trær. Vi sier at $() \in \mathcal{FBT}(A)$. Videre krever vi at gitt $x \in A$ så er $((), x, ()) \in \mathcal{FBT}(A)$ og gitt $V.H \in \mathcal{FBT}(A)$ slik at $V \neq () \neq H$, så har vi også $(V, x, H) \in \mathcal{FBT}(A)$ for alle $x \in A$. $\mathcal{FBT}(A)$ skal da være den minste mengden lukket under disse operasjonene.

Med T som gitt over har vi at $(T, 1, ()) \notin \mathcal{FBT}(\mathbb{N})$: Intuitivt nok fordi 1 bare har ett barn. T er et fullt binærtre.

7

a) Definer rekursivt en funksjon som teller antallet noder i et binærtre.

b) Definer rekursivt en funksjon som teller dybden til et binært tre.

c) Vi sier at en node er en indre node om den har mer enn 0 barn. Vi sier videre at en node er et løv om den har 0 barn. Vis at antall løvnoder i et fullt binærtre er lik antall indre noder pluss 1.