Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret matematikk Høst 2023

Plenumsregning 2

1 La $M = \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

a) Da gir $\subseteq$ en partiell ordning på M. Tegn det korresponderende hassediagrammet.

b) Hvilke egenskaper har relasjonen $\subsetneq$ på M? Gir det fortsatt mening å snakke om Hasse-diagrammet vi tegnet over?

c) La $A \cap B$ være relasjonen på M gitt ved $A \sim B$ når $A \cap B = \emptyset$. Hvilke egenskaper har denne relasjonen?

2 Betrakt en vilkårlig funksjon $f\colon D \to V$.

D kalles gjerne *definisjonsområdet* til f, og V kalles gjerne *verdiområdet* til f.

Billedmengden til f er en delmengde av verdiområdet, bestående av de elementene i V som f 'treffer'.

a) Gi en presis definisjon av bildemengden til en funksjon $f\colon D \to V$.

La $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være gitt ved $f(x) = x + 1$. La $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være gitt ved $g(x) = x \cdot 2$

b) Finn billedmengden til g.

c) Finn billedmengden til $f \circ g$.

d) Finn billedmengden til $g \circ f$.

3 Denne oppgaven handler om tellbare og ikke-tellbare mengder.

a) Forklar hvorfor $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er tellbar. Illustrer hvorfor $\mathbb{Q}$ er tellbar.
Bruk det at $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er tellbar til å konkludere at $A \times B$ er tellbar for vilkårlige tellbare mengder A og B.

En bitstreng er en sekvens på formen $b_0, b_1, \ldots, b_m$ der $b_i \in \{0,1\}$ og $m \geq 1$. La mengden $\mathcal{B}$ være mengden av slike bistrenger.

b) La $\mathcal{B}'$ være mengden av bitstrenger b som ikke starter på 0, altså slik at $b_0 \neq 0$. Finn en bijeksjon $\mathcal{B}' \to \mathbb{N}$.

c) En vilkårlig bitstreng av lengde m vil kunne starte med et antall 0-ere. Finn en bijeksjon $\mathbb{N} \times \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$.

d) Bruk a), b) og c) til å konkludere at $\mathcal{B}$ er tellbar.

Vi betraktet over mengden av endelige bistrenger. Vi kan også betrakte mengden $\mathcal{B}^\infty$ av uendelig lange bitstrenger, altså sekvenser på formen $b_1, b_2, b_2, \ldots$ hvor $b_i \in \{0, 1\}$ for alle $i \in \mathbb{N}$.

e) Vis ved diagonalisering at $\mathcal{B}^\infty$ ikke er tellbar.
Drøft tellbarhet til $\mathbb{R}$.