NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 12

Høst 2023

Teori:

I grafteori er det mange forskjellige begreper. Her oppsummerer vi noen av de viktigste tingene å huske: Når vi snakker om en *graf* uten noe ekstra 'adjektiv' foran, mener vi alltid en graf uten løkker, med kanter som går begge veier og aldri mer enn én kant mellom to noder.

En isomorfi fra en graf G til en graf H er en bijektiv avbildning f fra nodene i G til nodene i H slik at $f(v)$ og $f(u)$ er naboer i H hvis og bare hvis u og v er naboer i G.

En vandring i en graf er en sekvens nabonoder. En sti er en vandring hvor samme node ikke forekommer flere ganger.

Vi har også ulike begreper for å beskrive vandringer som begynner og slutter i samme node: En *krets* er en vandring som begynner og slutter i samme node, men hvor ingen kanter besøkes mer enn en gang.

Til slutt er en *sykel* en vandring som begynner og slutter i samme node, men hvor det ellers ikke forekommer noen kopier av noder.

1 La G være en graf med kanter E. Vi sier at en kant $e \in E$ er en bro hvis G er sammenhengdene, men hvis vi hadde fjernet e hadde vi endt opp med en usammenhengende graf. (Formelt kan vi definere fjerning ved å la $G - e$ være grafen med samme noder som G men med kanter $E \setminus \{e\}$)

a) Finn en graf med minst én bro.

b) Finn en graf uten broer.

c) Finn en graf med 4 noder og 1 bro.

d) Vis at en ikke-tom graf er et tre hvis og bare hvis alle kanter er broer.

e) La G være en sammenhengende graf uten broer. Vis at det mellom ethvert par av noder finnes minst to ulike stier.

2 Betrakt grafen G med noder $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og en $\{x, y\}$ hvis

$$x + 2 \equiv y \bmod 8$$

a) Er G sammenhengende?

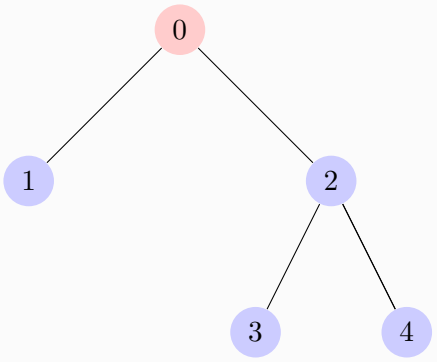
b) Hvor mange isomorfier finnes fra G til G?

Teori:

Husk at et tre er definert som en sammenhengende graf uten sykler. Vi definerer videre et **rotfestet tre** til å være et tre sammen med et valg av node. Når vi tegner et rotfestet tre tegner vi gjerne roten øverst.

Ved å velge en node som roten til treet gir oss en del fordeler. Vi kan nemlig snakke om for eksempel 'dybde'.

Betrakt for eksempel treet under. Der har vi valgt en rot som vi har farget rød. Naboene til denne noden kaller vi **barn**. Videre vil disse barna også kunne ha barn. Hvis x er barnet til y sier vi at y er forelderen til x. I treet under har for eksempel node 2 følgnede barn: node 3 og node 4. Node 2 har 0 som forelder.



3 Si at du er gitt et rotfestet tre T og to noder u, v. Du vil beskrive en metode å finne en vandring fra u til v og foreslår følgende algoritme: Du følger først u fra seg selv og oppover til sin forelder også videre til du treffer rot-noden. Du gjør det samme med v.

En vandring fra u til v kan nå finnes ved å følge den første vandringen og så den andre vandringen i omvendt rekkefølge.

I eksempelet i teori-boksen kunne vi da funnet en vandring fra 1 til 3 ved å først betrakte vandringen $1 - 0$ og så vandringen $3 - 2 - 0$ og til slutt kombinere dem til $1 - 0 - 2 - 3$.

a) Finn et eksempel hvor den foreslåtte algoritmen *ikke* gir den korteste vandringen fra u til v.

b) Beskriv hvordan vi kan 'trimme ned' den foreslåtte vandringen slik at vi alltid finner korteste vandring mellom u og v.