NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Plenumsregning 10

Høst 2023

Teori:

Vi så i forrige plenumsregning at vi kan introdusere likhet ved å definere et relasjonssymbol med navn for eksepel Lik av aritet 2 og tolke det som $\textsc{Lik}^{\mathcal{M}} = \{\langle x, x\rangle \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}\}$ i en modell $\mathcal{M}$ med domene $\mathcal{D}$. Når vi vet at vi ønsker å tolke Lik på denne måten kan det gi mening å skrive $x = y$ i stedet for $\textsc{Lik}(x, y)$ og $x \neq y$ i stedet for $\neg\textsc{Lik}(x, y)$.

Fra nå av tar vi for gitt at vi har en tolkning av likhet i modellene våre, og at vi derfor fritt kan bruke likhetstegnet.

Husk også at av et gitt språk som tilfredstiller en påstand ψ kalles *modeller av* ψ.

1 La $\mathcal{S}$ være språket med konstantsymboler $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (altså et konstansymbol for hvert naturlig tall), et funksjonssymbol Neste med aritet 1 og et relasjonssymbol Mindre med aritet 2. Vi antar også at vi har likhet.

Vi så i forrige plenumsregning på et lignende språk, men da med likhet som et eksplisitt relasjonssymbol, og uten Mindre-relasjonen.

Vi definerer også her en modell $\mathcal{N}$ som skal ha de naturlige tallene som domene, altså $\mathcal{D} = \mathbb{N}$. Vi tolker a_i som tallet i. Videre tolker vi Neste som funksjonen som legger til 1 til et tall, altså $\textsc{Neste}^{\mathcal{N}}(x) = x + 1$. Vi tolker Mindre som mindre-enn eller lik relasjonen, altså

$$\textsc{Mindre}^{\mathcal{N}} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$$

a) Tolk den lukkede formelen $\textsc{Mindre}(a_3, \textsc{Neste}(\textsc{Neste}(a_2)))$ i $\mathcal{N}$.

b) Forklar hvorfor alle modeller av $\mathcal{S}$ tilfrestiller den første formelen under. Hva betyr de to siste formlene generelt, og tilfredstiller $\mathcal{N}$ dem?

- $\forall x \exists y(\textsc{Neste}(x) = y)$
- $\forall x \exists y(\textsc{Neste}(y) = x)$
- $\forall x \forall y((\textsc{Neste}(x) = \textsc{Neste}(y)) \to x = y)$.

c) Ta stilling til hver av påstandene under. Forklar kort hvorfor de alle er sanne i $\mathcal{N}$.

- $\varphi_0 = \forall x \textsc{Mindre}(x, x)$
- $\varphi_1 = \forall x \forall y((\textsc{Mindre}(x, y) \wedge \textsc{Mindre}(y, x)) \to x = y)$
- $\varphi_2 = \forall x \forall y \forall z((\textsc{Mindre}(x, y) \wedge \textsc{Mindre}(y, z)) \to \textsc{Mindre}(x, z))$

d) Følgende påstand er sann i $\mathcal{N}$. Hva betyr den?

$$\varphi_3 = \forall x(\textsc{Mindre}(x, \textsc{Neste}(x)))$$

e) La $\varphi_X = \bigwedge_{i \in X} \varphi_i$, så for eksempel

$$\varphi_{\{0,1,2,3\}} = \varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

Beskriv nå en endelig modell av $\varphi_{\{0,1,2,3\}}$.

f) Bestem om

$$\varphi_{\{0,1,2,3\}} \implies \forall x \textsc{Mindre}(x, \textsc{Neste}(\textsc{Neste}(x)))$$

g) Bestem om

$$\varphi_{\{0,1,2,3\}} \implies \forall x \forall y (\textsc{Mindre}(x, y) \to \textsc{Mindre}(\textsc{Neste}(x), \textsc{Neste}(y)))$$

h) La nå $\varphi_4 = \forall x (x \neq \textsc{Neste}(x))$. Beskriv en endelig modell av φ_4. Forklar hvorfor tolkningen av Mindre er irrelevant.

i) Vis at $\varphi_4 \wedge \forall x (x = \textsc{Neste}(\textsc{Neste}(x)))$ er oppfyllbar ved å eksplisitt finne en modell som opfyller påstanden.

j) Finn en modell av størrelse 4 som oppfyller påstanden over.

k) Forklar hvordan endelige modeller av φ_4 oppfører seg generelt.

l) Vis at det ikke eksisterer en endelig modell av $\varphi_{\{0,1,2,3,4\}}$.

m) La $\varphi_5 = \forall x \exists y (\textsc{Neste}(y) = x)$. Finn en modell av $\varphi_{\{0,1,2,3,4,5\}}$.