Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret matematikk Høst 2023

Plenumsregning 1

1 La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

a) Finn $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$.

b) Vi har universet vårt $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. Hva blir da $A \cap \overline{B}$?

Vi skal nå utforske delmengder av A.

c) Er $\{1\}$ en delmengde av A?

d) Er $\emptyset$ en delmengde av A?

e) La $C = \{\{1\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3\}, 4, \emptyset, \{\{2\}\}, A\}$
Regn ut $\{S \in C \mid S \subseteq A\}$

f) Hvor mange delmengder av A med tre elementer finnes det?

g) Beskriv alle delmengdene av A.

Mengden av alle delmengder av en mengde X skrives $\mathcal{P}(X)$, og kalles potensmengden til X. Formelt kan vi si at $\mathcal{P}(X) = \{S \mid S \subseteq X\}$.

h) Beskriv $\mathcal{P}(A)$.

Vi skal nå koble det vi har sett om delmengder og potensmengder til relasjoner på mengder.

i) Beskriv $A \times A$

j) Hvor mange elementer finnes det i $\mathcal{P}(A \times A)$?

k) Hvor mange binærrelasjoner finnes det på A?

l) Finn alle relasjonene på $A \cap B$.

2 Vi skal her se på noen ligninger for mengder.

Bevis at *De Morgans* lover holder for mengder, altså:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c) La A og B være som i oppgave 1. Regn ut $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Bevis at de følgende *distributive lover* gjelder:

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Forklar hvorfor $A \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap B)$. Hint: Du trenger bare finne ett konkret tilfelle hvor ligningen ikke holder.

3 Vi skal her se på delmengder av de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, så vi setter altså $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

a) Vi kan beskrive partallene som mengden $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Hvordan kan vi tolke $\overline{A}$?

La nå $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$ og $C = \{7x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

b) Beskriv $B \cap C$

c) Beskriv $\overline{A} \cap B$

d) Bruk mengebygger-teknikken til å beskrive tallene i $\mathbb{N}$ som kan deles på 7 minst to ganger som en delmengde av C.

e) Vis at $\{12x \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq B$.

f) Beskriv mengden av alle primtall.

4 La $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, 2, 3\}$

Ta stilling til sannhetsverdien til følgende utsagn.

a) $2 \in M$

b) $1 \in M$

c) $\{1\} \subseteq M$

d) $\{\{1\}, 3\} \subseteq M$

e) $\{1\} \in M$

f) $\{\{1\}\} \in M$

g) $\{1, 2\} \cap M = \{1, 2\}$

h) $M = \mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \{2, 3\}$

5 Vi skal her se på et kjent problem i mengelære, nemlig spørsmålet om det gir mening å snakke om en "mengde av alle mengder".

Vi begynner med en analogi. La oss si at det arbeider én, og bare én, frisør i den spanske byen Sevilla. La oss nå, tilsynelatende logisk nok, foreslå at **frisøren klipper akkurat de i byen som ikke klipper håret sitt selv**. Hvem klipper da frisørens hår? Vel, om han klipper det selv skal han ikke klippes av frisøren, men han er jo frisøren, så han har derfor ikke anledning til å klippe det selv.

Om han derimot ikke klipper håret sitt selv, skal han klippes av frisøren. Siden han selv *er* frisøren, kan heller ikke dette gjennomføres. Dermed er påstanden at frisøren klipper alle som ikke klipper seg selv"umulig å tilfredstille, og vi har dermed et paradoks for hende.

Dette problemet er en variant av Russels paradoks, som vi nå skal se på.

a) La oss si at det eksisterer en mengde av alle mengder X. Denne mengden ville da inneholdt alle andre mengder, så for eksempel $\{1, 2, 3\} \in X$, $\mathbb{N} \in X$. La oss nå definere $R = \{M \in X | M \notin M\}$, altså vi tar alle mengdene som ikke inneholder seg selv, og dette vil være en delmengde av X.

Vi spør oss nå om R inneholder seg selv. Vis at $R \in R$ fører til $R \notin R$. Vis at dette fører til et paradoks, gitt definisjonen av R?