NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Øving 8

Høst 2023

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt .pdf-fil.

1 La $\mathcal{S}$ være språket med konstantsymboler a_i for alle $i \in \mathbb{N}$ (altså har vi $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ osv.) og et relasjonssymbol E med aritet 2. Vi antar også at vi har likhet i språket vårt og i alle modeller. (Se notater fra plenumsregning 10 for en grundigere forklaring på hva vi mener med dette).

Tips: I oppgavene diskuterer vi først generelle modeller av $\mathcal{S}$. Etter det ser vi utelukkende på modeller som tilfredstiller påstandene i a). Oppgavene er ikke sortert kun etter vanskelighetsgrad, så hopp gjerne litt fram og tilbake om du sitter fast.

a) Betrakt påstandene under.
- $\varphi_1 = \forall x \neg E(x, x)$
- $\varphi_2 = \forall x \forall y (E(x, y) \to E(y, x))$

Finn en modell som tilfredstiller $\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.

b) Vis at $\neg(E(a_0, a_1) \to a_0 \neq a_1) \implies \neg\varphi_1$.

c) Vis at $\varphi_1 \iff \forall x \forall y (E(x, y) \to x \neq y)$

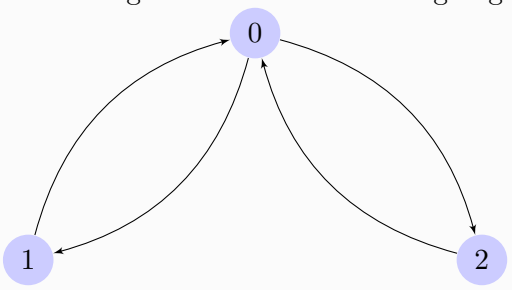
d) Betrakt teoridelen under. Tilfredstiller modellen som defineres $E(a_{10}, a_6)$?

Teori:

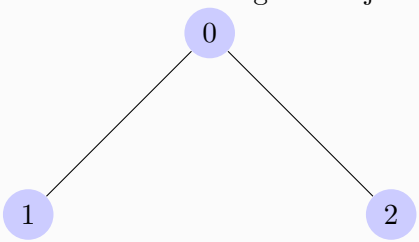
Vi viser her et eksempel på en modell av $\mathcal{S}$, samt hvordan den kan tegnes. Vi definerer en modell $\mathcal{M}$ av $\mathcal{S}$ med domene $\{0, 1, 2\}$ og

$$E^{\mathcal{M}} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$$

Vi tolker a_i som $i \,\%\, 3$.
På side 66 i Logiske metoder ser vi hvordan vi kan tegne binærrelasjoner. Hvis vi tegner $E^{\mathcal{M}}$ får vi da en tegning som under.

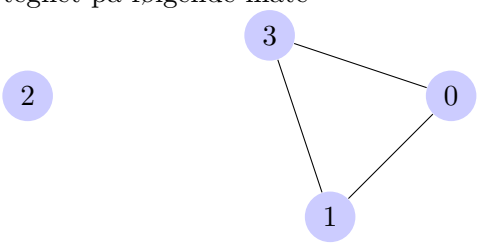


Merk at $\mathcal{M}$ er en modell av $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, fordi vi tolker E som en anti-refleksiv og symmetrisk relasjon.
I modeller $\mathcal{M}$ som tilfredstiller $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ kan vi forenkle tegningene våre en del. Siden vi vet at relasjonen vi skal tegne er symmetrisk kan vi illustrere $(x, y) \in E^{\mathcal{M}}$ med en strek uten pil mellom x og y. I tillegg sier φ_1 at vi aldri vil trenge å tegne løkker. Slike illustrasjoner, altså med punkter og streker/kanter mellom dem er essensielt tegniner av *grafer*.
Gitt dette kan vi tegne relasjonen $E^{\mathcal{M}}$ som vist under:



Spesifikt tegner vi et punkt for hvert element i domenet, og en *kant* mellom to punkter hvis de to er relatert i tolkningen av E.
Merk at hvordan vi tolker konstantsymbolene ikke påvirker *tegningen*. Om en modell av $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ skal beskrives med hjelp av tegninger kan vi derfor for eksempel først tegne tolkningen av E vi vil ha, og så spesifisere hvordan vi tolker konstantsymbolene.

e) Finn en modell av $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ som (gitt merknaden i teoriboksen over) ville blitt tegnet på følgende måte



f) Tegn en modell av

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge E(a_0, a_1) \wedge E(a_1, a_2) \wedge \neg E(a_0, a_2)$$

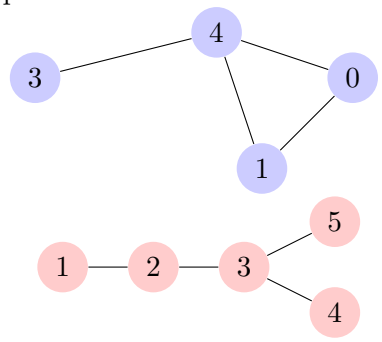
g) Tegn en modell av

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \forall x \exists y \exists z (E(x, y) \wedge \neg E(x, z) \wedge x \neq z)$$

h) Betrakt påstanden

$$\varphi_s = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \forall x \forall y \exists z (x = y \vee E(x, y) \vee (E(x, z) \wedge E(z, y)))$$

Under er det tegnet to modeller av $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, en blå og en rød. Nøyaktig én av dem tilfredstiller påstanden over. Spesifiser hvilken, og forklar hvorfor den andre *ikke* tilfredstiller påstanden.



i) La

$$\varphi_u = \exists x \exists y \forall z (x \neq y \wedge \neg E(x, z))$$

Forklar hva φ_u betyr. Gitt en tegning av en modell av $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, hvordan kan man raskt se om modellen oppfyller φ_u?

j) Bestem om $\varphi_u \implies \neg\varphi_s$

k) Bestem om $\neg\varphi_u \implies \varphi_s$.

l) Finn en uendelig modell av $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.