NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140
Diskret matematikk

Øving 7

Høst 2023

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt .pdf-fil.

1 La $\mathcal{S}$ være språket med konstantsymboler p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 og ett relasjonssymbol T med aritet 1.

Vi definerer en modell $\mathcal{M}$ av $\mathcal{S}$. La $\mathcal{M}$ ha domene $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ hvor vi tolker p_i som tallet i. Videre tolker vi T som mengden $\{1, 2, 3\}$, altså $T^{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3\}$

a) Er $T(p_2) \wedge T(p_3)$ sann i $\mathcal{M}$?

b) $\forall x T(x)$ sann i $\mathcal{M}$?

c) Er $T(p_4) \to T(p_5)$ sann i $\mathcal{M}$?

d) Er $\exists x \exists y (T(x) \wedge \neg T(y))$ sann i $\mathcal{M}$?

e) Finn en modell av $\mathcal{S}$ slik at $T(p_1) \wedge \neg T(p_2)$ er sann.

f) Forklar hvorfor $(T(p_1) \wedge T(p_2)) \to T(p_2)$ er sann i alle modeller av $\mathcal{S}$.

2 La $\mathcal{S}$ være språket med konstantsymboler $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ og to relasjonssymboler R og L med aritet 2. Vi vil i enhver modell tolke L som likhet av elementer i domenet.

En modell $\mathcal{M}$ av dette språket vil da bestå av et domene som inneholder tolkninger av a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 og slik at $R^{\mathcal{M}}$ er en binærrelasjon på $\mathcal{D}$, samt likhetsrelasjonen $L^{\mathcal{M}}$. **Se hintet under deloppgavene for et grundig eksempel.**

La φ være formelen

$$\exists x \forall y ((R(x, y) \vee R(y, x) \vee L(x, y)) \wedge \neg R(x, x))$$

I hvilken av modellene under er φ sann?

a) $\mathcal{M}_1$ har domene $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ hvor konstansymbolet a_i tolkes som i, og

$$R^{\mathcal{M}_1} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle\}$$

b) $\mathcal{M}_2$ har domene $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ hvor konstansymbolet a_i tolkes som i, og

$$R^{\mathcal{M}_2} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

c) $\mathcal{M}_3$ har domene $\{0, 1\}$ hvor konstansymbolet a_i tolkes som $i \,\%\, 2$, og

$$R^{\mathcal{M}_3} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$$

Merknad: I denne modellen blir for eksempel $L(a_1, a_3)$ sann, fordi vi bryr oss om likhet *i domenet*. Siden a_1 og a_3 begge tolkes som 1 er det fra modellen sitt perspektiv ikke noe som skiller dem fra hverandre.

d) $\mathcal{M}_4$ har domene $\{0, 1, 2\}$ hvor konstantsymbolet a_i tolkes som $i \,\%\, 3$, og

$$R^{\mathcal{M}_4} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$$

Hint: Vi forklarer et eksempel. Si at M_0 har domene $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ hvor konstansymbolet a_i tolkes som i. Her må vi tolke L, som vi har reservert til likhet, som relasjonen

$$L^{\mathcal{M}_0} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$$

Mer generelt, hvis en modell $\mathcal{M}$ har domene $\mathcal{D}$ og vi ønsker å tolke L som likhet, tolker vi L som

$$L^{\mathcal{M}} = \{\langle x, x\rangle \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}\}$$

Videre gir vi en tolkning av R:

$$R^{\mathcal{M}_0} = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$$

I modellen vår har vi at $\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle \in R^{\mathcal{M}_0}$ og $\langle 2, 2\rangle \notin R^{\mathcal{M}_0}$.

Da tallet 2 er representert av a_2 i $\mathcal{S}$ kan vi derfor se at påstanden under er sann i $\mathcal{M}$.

$$\forall y((R(a_2, y) \vee R(y, a_2) \vee L(a_2, y)) \wedge \neg R(a_2, a_2))$$

Derfor er φ sann i $\mathcal{M}$, fordi vi har funnet en passende x. Mer detaljert hvordan vi formelt kan tenke på dette vil bli gått igjen på oversiktsforelesningen uke 43.

Teori:

I forrige oppgave så vi at det er mulig å ha en modell med færre elementer i domenet sitt enn antallet konstantsymboler. Vi sier at størrelsen på en modell er størrelsen på domenet til modellen, som alltid er en mengde. En modell er da for eksempel endelig om domenet er en endelig mengde. Tilsvarende er en modell uendelig hvis domenet er uendelig.

I forrige oppgave har vi altså sett endelige modeller av størrelse $2, 3$ og 5.

3 La nå $\mathcal{S}$ være språket med konstantsymboler a, b, c, et funksjonssymbol f av aritet 2 og et relasjonssymbol L av aritet 2.

Vi definerer en modell $\mathcal{M}$ av $\mathcal{S}$. La $\mathcal{M}$ ha domene $\mathcal{D} = \{0, 1, 2\}$ hvor vi tolker $a^{\mathcal{M}} = 0$, $b^{\mathcal{M}} = 1$ og $c^{\mathcal{M}} = 2$. Videre tolker vi f som addisjon mod 3, altså $f^{\mathcal{M}}(x, y) = x + y \,\%\, 3$.

Vi tolker L som likhetsrelasjonen, altså $L^{\mathcal{M}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.

a) Er formelen $L(c, c)$ sann i $\mathcal{M}$?

b) Tolk termet $f(b, b)$ i $\mathcal{M}$.

c) Tolk termet $f(f(c, c), b)$ i $\mathcal{M}$.

d) Er formelen $\forall x L(x, f(a, x))$ sann i $\mathcal{M}$?

e) Er formelen $\exists x L(f(x, x), b)$ sann i $\mathcal{M}$?

f) Hva betyr formelen $\forall x \forall y (L(f(x, y), f(y, x)))$ i $\mathcal{M}$? Er formelen sann i $\mathcal{M}$?

g) Hva betyr formelen $\forall x \forall z \exists y L(f(x, y), z)$ i $\mathcal{M}$? Er formelen sann i $\mathcal{M}$?