NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret matematikk

Øving 2

Høst 2023

Øvingen skal leveres inn digitalt på Ovsys2. Alle svar skal begrunnes. Vi anbefaler sterkt å fullføre ukens STACK-øving før du begynner på denne skriftlige øvingen.

1 La $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Betrakt relasjonen $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle\}$. Hvilken av egenskapene under har R?

a) R er refleksiv

b) R er symmetrisk

c) R er transitiv

d) R er antisymmetrisk

e) R er irrefleksiv

2 La $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Betrakt relasjonene under, og ta stilling til om de er refleksiv (R), symmetrisk (S), transitiv (T), antisymmetrisk (A) og irrefleksiv (I).

a) $\{\langle x, y\rangle \mid x + y \text{ er partall}\}$

b) $\{\langle x, y\rangle \mid x \cdot y \text{ er partall}\}$

3 Under har vi noen funksjoner $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, altså funksjoner som tar inn et naturlig tall og gir ut et naturlig tall. For hver av dem, ta stilling til om funksjonen er surjektiv og/eller injektiv. Husk å begrunne svaret ditt.

(husk at 0 *teller som partall)*

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ x - 1, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ (x - 1)/2, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

4 La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være to funksjoner. Vi har da en funksjon $g \circ f : A \to C$.

Betrakt påstandene under. Bevis eller kom med et moteksempel til hver av dem.

a) Hvis f og g begge er surjektive, så er $g \circ f$ surjektiv.

b) Hvis $g \circ f$ er injektiv, så er f injektiv.

c) Hvis $g \circ f$ er injektiv, så er g injektiv.

5 Denne oppgaven handler om tellbare mengder. Husk at en mengde X er tellbar hvis det eksisterer en injektiv funksjon $f : X \to \mathbb{N}$.

a) La M være en tellbar uendelig mengde. Anta at $42 \notin M$. Vis at $M \cup \{42\}$ er en tellbar mengde.

b) La M og N være to tellbare mengder. Vis at $M \cup N$ er tellbar.

Teori:

De to egenskapene til tellbare mengder du blir bedt om å bevise over illustreres veldig godt av tankeeksperimentet som har fått navnet 'Hilberts Hotell' (etter David Hilbert). Se for eksempel `https://youtu.be/OxGsU8oIWjY?si=uEiyDiqAlOp5WYAU` for en forklaring av dette tankeeksperimentet: Oppgave a og b fra oppgaven over er essensielt sett det som diskuteres i videon frem til ca. 1:50.