TMA4140- 3. forelesning

Rekursjon og induksjon

Aslak Bakke Buan

September 11, 2023

Innhold

Induktivt definerte mengder

Rekursivt definerte funksjoner

Induksjon

Strukturell induksjon

Idé

I en endelig mengde kan vi liste opp alle elementene. Vi kan også beskrive en funksjon definert på en endelig mengde ved å si hvordan den skal virke på hvert element i mengden.

Å beskrive uendelige mengder, og funksjoner på slike, er ofte vanskelig.

Viktig verktøy: Induktivt definerte (uendelige) mengder og rekursivt definerte funksjoner.

Viktig anvendelse: Bevise påstander (f.eks. formler) som involverer uendelige mengder. Bevise at funksjoner/algoritmer gjør det de skal!

Hovedeksemplene for oss: Mengder av heltall, ofte $\mathbb{N}$, bitstrenger, formelle språk, binære trær (på torsdag).

Lukke under operasjon

Eks: $M = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være operasjonen $f(x) = x + 1$.
M er ikke lukket under f, fordi $f(2) = 3$ og $3 \notin M$.
Den minste delmengden av $\mathbb{R}$ som er lukket under f *og* inneholder M, er $\mathbb{N}$.

Uformell definisjon: En *induktivt definert mengde* er den minste mengde som inneholder en gitt mengde (som kalles *basismengde*), og som er lukket under én eller flere gitte operasjoner.

Her: basismengde $M = \{0, 1, 2\}$ og operasjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x + 1$.
Tillukningen er $\mathbb{N}$.

Kunne også valgt $M = \{0, 1\}$ eller $M = \{0\}$. Kunne ikke valgt $M = \{1, 2\}$, siden da vil 0 ikke være i tillukningen.

Induktivt definert mengde

- Basissteg: Spesifiser en basismengde M (som lever i et univers U).
- Induksjonssteg: Spesifiser én eller flere operasjoner $f_1, \ldots, f_r$ (altså funksjoner) på U.
- Tillukning: (Om mulig) velg den minste mengden L som inneholder M og er lukket under disse operasjonene.

Vi har altså at $f_i(x) \in L$, når $x \in L$, for hver av f_i-ene.

$\mathbb{N}$ er altså en induktivt definert mengde. Merk at vi kan velge forskjellige basismengder. Vanligvis velger vi $\{0\}$, siden den er minst.

$\mathbb{Z}$ er også en induktivt definert mengde. Vi kan velge basismengde $\{0\}$ og operasjoner $f_1(x) = x + 1$ og $f_2(x) = x - 1$ (begge definert på $U = \mathbb{R}$).

Flere induktivt definerte mengder av heltall

Mengden av ikke-negative partall er også induktivt definert. Basismengde $\{0\}$. Operasjon $f(x) = x + 2$.

Mengden av ikke-negative tall delelig med 42 er induktivt definert. Basismengde $\{0\}$. Operasjon $f(x) = x + 42$.

Mengden av heltall større enn 2 er induktivt definert. Basismengde $\{3\}$. Operasjon $f(x) = x + 1$.

Formelle språk - alfabet og strenger.

NB: vi gjør det litt annerledes og mer formelt enn i RA-boka.

La A være en endelig mengde, som vi kaller et **alfabet**.

La $n \in \mathbb{N}$.
En streng av lengde n er en n-tuppel av symboler i alfabetet, dvs et element i $A \times A \times \cdots \times A$ (n kopier av A).
Men vi skriver $abcd$ heller en $\langle a, b, c, d \rangle$ for a, b, c, d i A.

NB: Hvis $n = 0$: Vi sier at Λ er den eneste 0-tuppelen (den tomme strengen). Merk at denne er uavhengig av A. (Λ er den greske bokstaven Lambda).

Eksempel 1: La $A = \{0, 1\}$. Da er 011011 en streng av lengde 6 over A.

Eksempel 2: La $A = \{$a,b,c, . . . , æ,ø,å$\}$. Da er qwertyuiopå en streng av lengde 11 over A.

Formelle språk - definisjon

.

Definisjon: For et alfabet A, la A^* være mengden av alle endelige strenger over A.

Definisjon: La A være et alfabet. Et **formelt språk** er en delmengde av A^*.

Formelle språk defineres ofte induktivt.

Konkatenering: "Å skrive to strenger etter hverandre", eller å "slå sammen" to strenger.

La s, t være to strenger i A^*, av lengde henholdsvis n og m. Da er konkateneringen st en streng av lengde $n + m$.

Eksempel: konkateneringen av 0110 og 11 er 011011.

Eksempler på induktivt definerte formelle språk

Mengden av symmetriske strenger (palindromer).

Eksempel: Anna, Agnes irettesetter i senga, Kari i Irak. 1001, 10001, 10101
(NB: mellomrommene regnes ikke med her, og vi skiller ikke mellom stor og liten bokstav.)

La $A = \{0, 1\}$ være alfabetet. Da er A^* mengden av alle **bitstrenger**.
Induktiv definisjon av mengden S av alle symmetriske bitstrenger:
La basismengden være $\{\Lambda, 0, 1\}$.
Induksjonssteget: S defineres som den minste mengden som er slik at hvis $s \in S$, så er asa også i S, for hver $a \in A = \{0, 1\}$.

$S = \{\Lambda, 0, 1, 00, 11, 000, 101, 010, 111, \dots\}$

Rekursivt definerte funksjoner

Slogan: På induktivt definerte mengder, kan vi definere funksjoner rekursivt.

Husk: Vi har to "erkeeksempler" på induktivt definerte mengder M: $\mathbb{N}$ og formelle språk.

Ide: Vi definerer funksjonen først på basismengden, og så **rekursivt** på de andre elementene i M.

Eksempel: Funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved $f(n) = n!$
Husk $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ for $n \geq 1$, og $0! = 1$. Rekursiv definisjon:

Bruk basismengde $\{0\}$ og definer $f(0) = 1$. La så $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.

Fibonacci-tallene

La basismengden for $\mathbb{N}$ være $\{0, 1\}$ og la $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defineres ved $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$.

Definer så (rekursivt): $f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$.

Vi får da

$$f(2) = 1 \quad f(3) = 2 \quad f(4) = 3 \quad f(5) = 5 \quad f(6) = 8 \ldots$$

Tallrekka: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ - kalles Fibonacci-tallene, se `https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_sequence`.

Symmetriske strenger

La S være det formelle språket av symmetriske bitstrenger.
Basismengde $M = \{\Lambda, 0, 1\}$.

Induksjonssteg: S defineres som den minste mengden som er slik at hvis $s \in S$, så er $0s0$ og $1s1$ også i S.

Definer nå funksjonen: $f : S \to \mathbb{N}$ slik:

på basis-mengden: $f(\Lambda) = 0 \quad f(0) = 1 \quad f(1) = 0$
og rekursivt: $f(0s0) = f(s) + 2$ og $f(1s1) = f(s)$.

f teller da antall 0-er i strengen s.
Eksempel:
$f(01000010) = f(100001) + 2 = f(0000) + 2 = f(00) + 4 = f(\Lambda) + 6 = 0 + 6 = 6$

Matematisk induksjon

Ide: teknikk for å bevise at formler eller påstander holder for alle heltall n, evt. en annen uendelig (induktivt definert) mengde av heltall, for eksempel alle partall, eller alle heltall større enn 3.

Eksempler:
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ holder for alle n.

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ holder for alle n.

Alle partall er delelig med 2.

Hvert tredje Fibonacci-tall er et partall.

$n! > 2^n$ for $n \geq 4$.

Definisjon

NB: Vi gjør dette litt annerledes enn i boka: i kap 11 i boka er det kun påstander og formler som holder for *alle* positive tall som blir diskutert.

Bevis ved matematisk induksjon er bygd opp slik:
Vi skal vise at en påstand P (f.eks. en formel) holder for alle elementer i en induktivt definert mengde av heltall N.
La oss anta at mengden er definert ved starte med en endelig basismengde av heltall M, og så lukke under operasjonen f.
[Boka: $M = \{0\}$ og $f(x) = x + 1$]

- Basissteget: Først vises at påstanden P holder for alle elementer i M.
- Induksjonssteget: Så vises: hvis y i N framkommer ved å bruke operasjonen f på et element x, som oppfyller P, holder P også for y.

Standard matematisk induksjon

Skal vise at en påstand holder for alle heltall ≥ 0.
Hvis vi:

- først viser at påstanden holder for $n = 0$ (altså for basismengden $\{0\}$), og
- så viser at hvis påstanden holder for s, så holder den også for $s + 1$ (lukket under operasjonen $f(x) = x + 1$),

da har vi **ved induksjon** bevist at påstanden holder for alle naturlige tall.

Eksempel I

Skal vise: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ holder for alle $n \geq 1$

Basis mengde: $\{1\}$. Venstre side: 1 Høyre side: $\frac{1\cdot 2}{2}=1$.

Altså: formelen holder for tallene (her: tallet) i basis mengden.

Induksjonssteget: Hvis formelen holder for tallet s, så holder den også for tallet $s+1$.

At formelen holder for s, betyr $(*)$ $1+2+3+\cdots+s=\frac{s(s+1)}{2}$.

Skal vise at formelen også holder for $s+1$, altså at $1+2+3+\cdots+s+(s+1)=\frac{(s+1)(s+2)}{2}$.

Vi prøver å regne ut venstresida ved å bruke det vi vet, altså $(*)$:

$1+2+3+\cdots s+(s+1)=\frac{s(s+1)}{2}+(s+1)=\frac{s(s+1)}{2}+\frac{(s+1)\cdot 2}{2}=\frac{s(s+1)+(s+1)2}{2}=\frac{(s+1)(s+2)}{2}$.

I det første steget, startet vi med $(*)$ og la til $s+1$, etterpå var det bare brøkregning. Vi har da vist at formelen holder også for $s+1$, og dermed har vi ved induksjon vist formelen for alle naturlige tall $n \geq 1$.

Eksempel II

Skal vise at $n! > 2^n$ for $n \geq 4$.

La basismengden være $\{4\}$. (Hvorfor er dette en naturlig basismengde?)

Da er venstresiden $4! = 24$, og høyresiden er $2^4 = 16$, så påstanden er sann for $n = 4$.

Vi skal nå vise at hvis påstanden holder for det naturlige tallet $s \geq 4$, holder den også for tallet $s + 1$ (induksjonssteget).

Altså: vi vet at den holder for s, betyr $s! > 2^s$.

Da er $(s + 1)! = s!(s + 1) > 2^s(s + 1) > 2^s \cdot 2 = 2^{s+1}$.

Altså holder påstanden også for $s + 1$, og vi har da vist (ved induksjon) at den holder for alle $s \geq 4$.

Eksempel III

Alle positive partall er delelig med 2, dvs har 2 som en faktor. (Advarsel: vi kunne brukt dette som definisjon på partall, men vi bruker i stedet en induktiv definisjon, som følger:).

Basismengde $M = \{2\}$. Mengden av alle partall P kan defineres induktivt ved at P inneholder M, og P er den minste mengden som inneholder M og er lukket under operasjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved$f(x) = x + 2$.

Vil så vise at 2 er en faktor i x, for alle $x \in P$.

Basis-steget: 2 er en faktor i 2.

Induksjonssteget. Anta at 2 er en faktor i p, må da vise at 2 er en faktor i $p + 2$.

Vi vet $p = 2 \cdot q$.

Da er $p + 2 = 2 \cdot q + 2 = 2 \cdot (q + 1)$. Så 2 er en faktor i $p + 2$.

Dermed er 2 en faktor, også i $p + 2$, og dermed (ved induksjon): 2 er en faktor i alle positive partall.

Strukturell induksjon

Idé: Alt vi kan gjøre med induktivt definerte mengder av hele tall, kan vi også gjøre med andre induktivt definerte mengder.

På torsdag: introduksjon av binære trær, og oppgaver om slike.

Eksempel

La $\mathcal{B}$ være mengden av bitstrenger, og la $f : \mathcal{B} \to \mathbb{Z}$ være funksjonen gitt ved at $f(b)$ er antall ganger 10 forekommer i b minus antall ganger 01 forekommer i b.

Altså er $f(11001010) = 1$, og $f(11001011) = 0$.

Vis (induktivt) at hvis b er på formen 1.....0 vil $f(b) = 1$ og hvis b er på formen 1.....1 vil $f(b) = 0$.

La $\mathcal{B}'$ være bitstrenger på formen 1.....0.
Mengden defineres induktivt: basismengde $\{10\}$. To operasjoner: $h(1b_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{3}} \ldots b_{n-\mathbf{1}}0) = 1b_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{3}} \ldots b_{n-\mathbf{1}}00$ og $g(1b_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{3}} \ldots b_{n-\mathbf{1}}0) = 1b_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{3}} \ldots b_{n-\mathbf{1}}10$ (altså: vi setter inn 0 eller 1 rett før det siste sifferet i strengen.

For basismengden $\{10\}$, har vi $f(10) = 1$.

Anta først at $b_{n-\mathbf{1}} = 0$. Da vil både antall 10-ere og antall 01-ere være uforandret når vi setter inn 0. Både antall 10-ere og antall 01-ere vil øke med 1, når vi setter inn 1.

Anta så $b_{n-\mathbf{1}} = 1$. Da vil både antall 10-ere og antall 01-ere være uforandret når vi setter inn 0 eller 1.

Vi har dermed (ved strukturell induksjon) vist første del av påstanden, altså at hvis b er på formen 1.....0, så vil $f(b) = 1$.

Oppgaver til dere: (a) vis andre del! (b) Hva kan vi si om de andre strengene, altså de som starter med 0?

Definisjon

Anta at en mengde N er induktivt definert med en basismengde M, og operasjoner $f_1, \ldots f_r$. Vi vil vise at en påstand P holder for alle elementer i N. Dette gjør vi ved å:

- Vise at P holder for alle elmenter i basismengden.
- Vise at hvis et element x i N framkommer fra elementer $x_1, \ldots, x_n$ ved hjelp av en av operasjonene f_i, og P holder for alle x_j-ene, så holder P også for x.

Plenumsregningen -torsdag

- Øve på induktive definisjoner av mengder og rekursive definisjoner av funksjoner
- Øve på bevis ved induksjon
- Møte sterk induksjon
- Leke med Fibonacci-tallene
- Lære om binære trær