TMA4140- 2. forelesning

Relasjoner og funksjoner

Aslak Bakke Buan

August 28, 2023

Innhold

Relasjoner

Egenskaper ved relasjoner

Funksjoner

Viktige typer funksjoner

Matematiske relasjoner dere kjenner:

$$< \quad > \quad \leq \quad \geq \quad = \quad \neq$$

Alle disse er relasjoner på mengder av tall, f.eks. $\{1, 2, 3\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ eller $\mathbb{R}$.

Andre relasjoner dere kjenner:
"kjenner", "liker", "går i samme klasse som".

Alle disse kan være relasjoner på mengder av mennesker (eller kenguruer?),
f.eks. {Amal, Bernt, Clara} eller {kenguruer i byen Odense}.

Tabeller, diagram, delmengder

Tre måter å beskrive en relasjon på en mengde på.

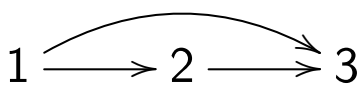
Eksempel: Relasjonen $<$ på mengden $\{1, 2, 3\} = A$.
Altså $1 < 2$ $1 < 3$ $2 < 3$

Tabell:

$<$	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	1
3	0	0	0

(0 - nei, 1 - ja)

Figur med piler:



Delmengde av $A \times A$:

$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\} \subseteq A \times A$

Tabeller, diagram, delmengder II

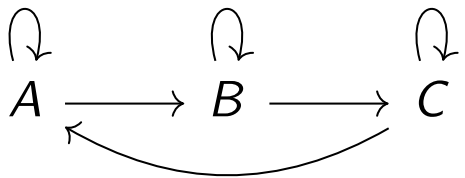
Eksempel: Relasjonen *liker* på mengden $\{\text{Amal, Bernt, Clara}\} = \mathcal{M}$
Anta Amal liker Bernt, Bernt liker Clara, Clara liker Amal. (Og at alle liker seg selv.)

Tabell:

liker	A	B	C
A	1	1	0
B	0	1	1
C	1	0	1

(0 - nei, 1 - ja)

Figur med piler:



Delmengde av $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$:

$$\{\langle A, A\rangle, \langle A, B\rangle, \langle B, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, A\rangle, \langle C, C\rangle\} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$$

Relasjoner fra en mengde til en annen

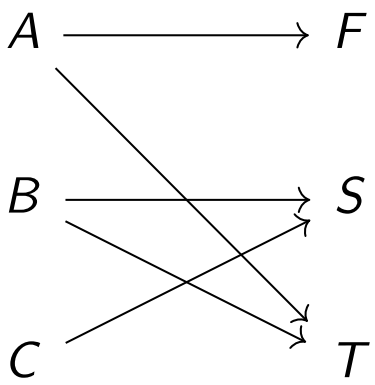
La nå $\mathcal{S} = \{\text{Fransk, Spansk, Tysk}\}$, og la "snakker" være en relasjon fra $\mathcal{M} = \{\text{Amal, Bernt, Clara}\}$ til $\mathcal{S}$.

Tabell:

snakker	F	S	T
A	1	0	1
B	0	1	1
C	0	1	0

(0 - nei, 1 - ja)

Figur med piler:



Delmengde av $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$:

$$\{\langle A, F\rangle, \langle A, T\rangle, \langle B, S\rangle \langle B, T\rangle, \langle C, S\rangle\} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{S}$$

Relasjoner, formell definisjon

A, B mengder
Definisjon: En binær relasjon fra A til B, er en delmengde av $A \times B$
Definisjon: En binær relasjon på A, er en delmengde av $A \times A$.

Hvis $R \subseteq A \times B$, og
$\langle a, b \rangle \in R$ skriver vi (noen ganger) aRb (kalles: infiks-notasjon)

Eksempel: $\leq$ er en (binær) relasjon på mengden $\{1, 2, 3\}$.
Da skriver vi $1 \leq 3$ heller enn $\langle 1, 3 \rangle \in \leq$.

Egenskaper

Egenskaper en relasjon R på en mengde A kan ha.

Refleksiv	$\langle a, a\rangle \in R$ for alle $a \in A$	$\leq, =, \geq$
Symmetrisk	$\langle a, b\rangle \in R$ bare hvis $\langle b, a\rangle \in R$	$=, \neq$
Transitiv	$\langle a, b\rangle \in R$ og $\langle b, c\rangle \in R$ bare hvis $\langle a, c\rangle \in R$	$\leq, =, <, >, \geq$
Anti-symmetrisk	$\langle a, b\rangle \in R$ og $\langle b, a\rangle \in R$ bare hvis $a = b$	$<, >, =, \leq, \geq$
Irrefleksiv	$\langle a, a\rangle \notin R$ for alle $a \in A$	$<, >, \neq$

NB1: $=$ er både symmetrisk og anti-symmetrisk
NB2: $\{\langle x, x\rangle, \langle x, y\rangle\}$ er en relasjon på $\{x, y\}$ som hverken er refleksiv eller irrefleksiv. Den er også hverken symmetrisk eller anti-symmetrisk.

Refleksiv + Symmetrisk + Transitiv: Ekvivalenrelasjon
Refleksiv + Anti-symmetrisk + Transitiv: Partiell ordning

Ekvivalensrelasjoner og partielle ordninger

Refleksiv + Symmetrisk + Transitiv: Ekvivalenrelasjon

Eksempel 1: $=$ på alle mengder av tall.
Eksempel 2: Kongruens.
La $a, b \in \mathbb{Z}$.
Vi sier at $a \equiv b \pmod 5$ hvis $5 \mid a - b$.
$8 \equiv 3 \pmod 5$ og $3 \equiv 13 \pmod 5$, men $9 \not\equiv 3 \pmod 5$

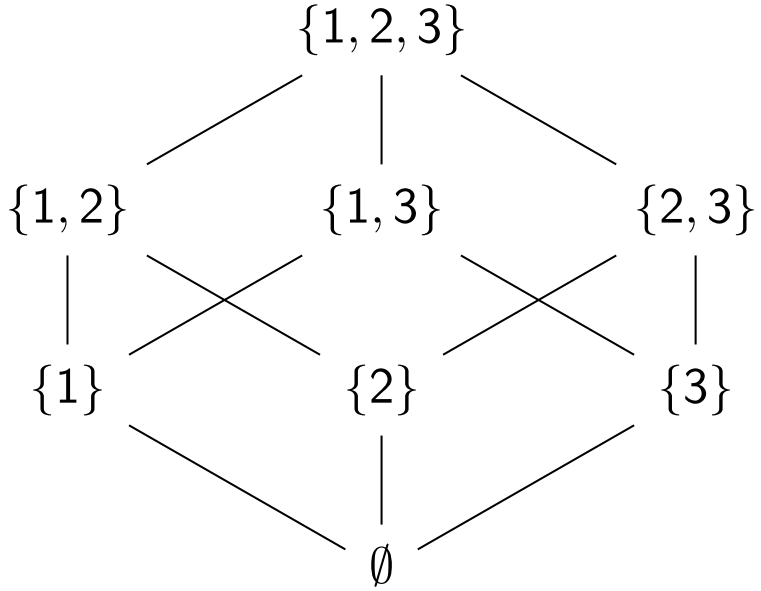
Refleksiv + Anti-symmetrisk + Transitiv: Partiell ordning
Eksempel 1: $\leq$ og $\geq$ på alle mengder av tall.

Eksempel 2: $\subseteq$ på mengden av delmengder av en mengde A.

Eksempel 3: $\mid$ på mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Hasse-diagram for potensmengde

Eksempel: Se på potensmengden $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ med relasjonen $\subseteq$.

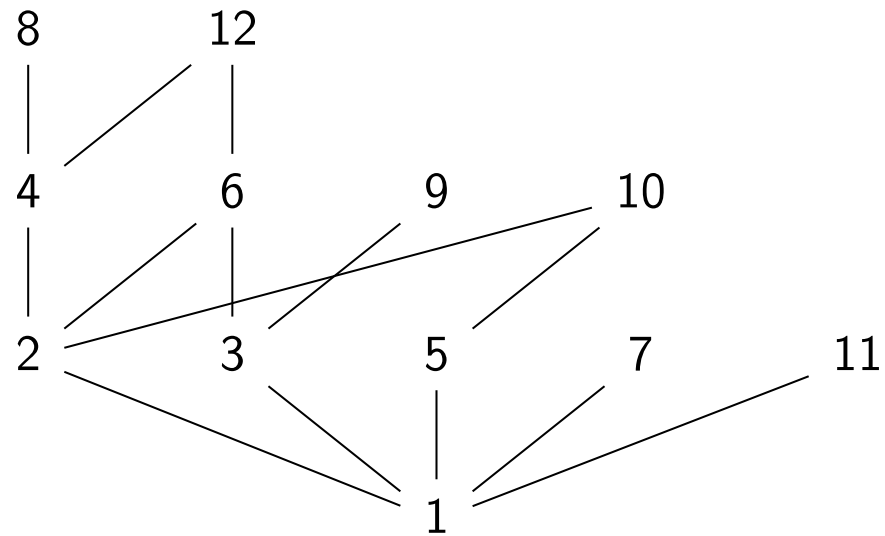


Denne relasjonen er en partiell ordning. Vi trenger ikke inkludere piler fra et et element til seg selv, siden ordningen er refleksiv. Vi trenger ikke inkludere piler f.eks. $\{2\} - \{1,2,3\}$ siden den også er transitiv.
Vi tegner ikke pilhoder, siden alle relasjoner går samme retning (oppover).

Hasse-diagram for divisor-relasjonen

Eksempel: Se på mengden $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ med relasjonen $|$.
Vi har f.eks. $2 \mid 4$ $2 \mid 6$ $5 \mid 10$ osv.

Hasse diagram:



Hasse-diagram - formell definisjon

En relasjon R på en mengde A som er en partiell ordning, kan beskrives vha Hasse-diagrammet.

Vi har en kant mellom to elementer a og b hvis

- $\langle a, b\rangle \in R$ (altså aRb), og
- hvis $\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle \in R$, så er $c = a$ eller $c = b$.

Funksjoner - eksempler dere kjenner

$f(x) = x^2$
$g(x) = x + 1$

Det er tre ting vi trenger vite om funksjoner.

- Hva kan vi putte inn (definisjonsområdet)?
- Hvor kan output ligge (verdiområdet)?
- Hva er sammenhengen (relasjonen) mellom input og output?

Slogan: Funksjoner er relasjoner fra definsjonsområdet D til verdiområdet V.
Vi skriver $f : D \to V$.

Definisjons- og verdiområdet

$$f(x) = x^2 \quad f : D \to V$$

Beskrivelsen av hva f gjør (kvadrerer) bestemmer ikke definisjonsområdet D eller verdiområdet V. Når definisjonsområdet er valgt, må vi være nøye med å velge et passende verdiområde.

Disse er ok:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3, 4\}$

$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\}$

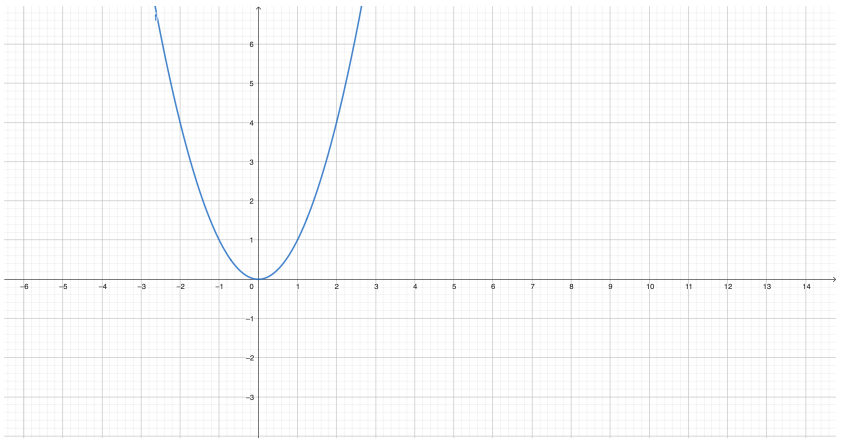
Disse er *ikke* ok:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$

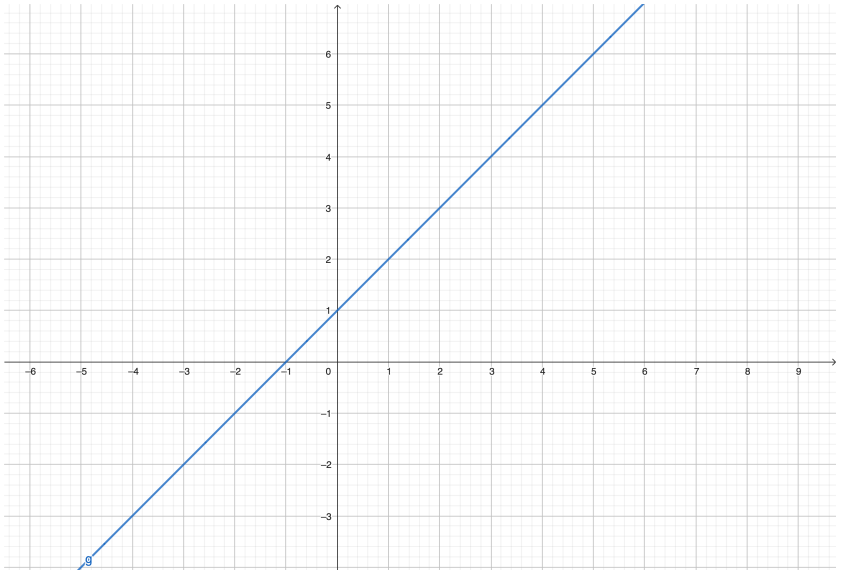
Grafer

$$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



Grafen er en delmengde av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\{\langle x, x^2 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$
Dette er en relasjon på $\mathbb{R}$.

$$g(x) = x + 1 \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



Grafen er en delmengde av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\{\langle x, x + 1\rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$

Dette er en relasjon G på $\mathbb{R}$.

F.eks. $\langle 2, 3\rangle \in G$, mens $\langle 3, 3\rangle \notin G$.

Endelig eksempel

$f : \{1, 2, 3\} \to \{\bullet, \circ\}$
Her er altså $\{1, 2, 3\}$ definisjonsområdet og $\{\bullet, \circ\}$ er verdiområdet.
$f(1) = \bullet$
$f(2) = \bullet$
$f(3) = \circ$
$f = \{\langle 1, \bullet\rangle, \langle 2, \bullet\rangle, \langle 3, \circ\rangle\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{\bullet, \circ\}$

Eksemplene har til felles:

$f : D \to V$. For hver x i D finnes nøyaktig én y i V, slik at $\langle x, y\rangle$ er i $f \subseteq D \times V$.

Funksjon: Formell definisjon

A, B mengder

En funksjon $f : A \to B$ er en binær relasjon fra A til B, altså en delmengde av $A \times B$, med følgende egenskap:

For hver $x \in A$ er det nøyaktig ett element $y \in B$, slik at $\langle x, y \rangle \in f$.

Og vi skriver $f(x) = y$ og $f : A \to B$.

Eksempel

La $\mathcal{M} = \{\text{Amal, Bernt, Carol}\}$ og la $h\colon \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ være gitt ved

$$h(A) = 175 \qquad h(B) = 171 \qquad h(C) = 180$$

$$\text{altså } h = \{\langle A, 175\rangle, \langle B, 171\rangle, \langle C, 180\rangle\}$$

Dette er en funksjon.

$$z = \{\langle A, 114\rangle, \langle B, 117\rangle\}$$

er *ikke* en funksjon $\mathcal{M} \to \mathbb{N}$, fordi $z(C)$ ikke er definert.

$$u = \{\langle A, 200\rangle, \langle B, 150\rangle, \langle A, 175\rangle\}$$

er *ikke* en funksjon $\mathcal{M} \to \mathbb{N}$.

Injektive og surjektive funksjoner

Gitt funksjon:

$$f : A \to B \text{ alternativt } f \subseteq A \times B$$

f er injektiv betyr: $\langle x, y \rangle \in f$ og $\langle x', y \rangle \in f$ bare hvis $x = x'$.

f er surjektiv betyr: For hver $b \in B$ finnes $a \in A$, slik at $\langle a, b \rangle \in f$.

f er bijektiv betyr: f er injektiv og surjektiv.

Eksempler

$f = \{\langle 1, \bullet\rangle, \langle 2, \bullet\rangle, \langle 3, \circ\rangle\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{\bullet, \circ\}$
er surjektiv, men ikke injektiv, siden både $\langle 1, \bullet\rangle \in f$ og $\langle 2, \bullet\rangle \in f$.

$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
er ikke surjektiv, siden det ikke finnes noen a slik at f.eks. $\langle a, -1\rangle$ er i f, altså: ingen a slik at $f(a) = -1$.
f er heller ikke injektiv, siden $f(2) = f(-2) = 4$, altså både $\langle 2, 4\rangle$ og $\langle -2, 4\rangle$ er i f.

$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er ikke surjektiv, siden det ikke finnes noen $a \in \mathbb{N}$ slik at f.eks. $\langle a, 3\rangle$ er i f, altså: ingen $a \in \mathbb{N}$ slik at $f(a) = 3$.
Men: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er injektiv!
Oppgave: hvorfor?

Flere eksempler

$g(x) = x + 1 \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er bijektiv.

Men $g(x) = x + 1 \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er ikke surjektiv.
Oppgave: hvorfor/hvorfor ikke?

$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definert ved $f(1) = 2 \qquad f(2) = 3 \qquad f(3) = 1$ er bijektiv.

Merk: $f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

Det kan ikke finnes noen surjektiv funksjon $g : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$.

Det kan ikke finnes noen injektiv funksjon $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$.

Inverse funksjoner

Hvis $f : A \to B$ er bijektiv, kan vi også definere en invers funksjon $g : B \to A$.
Denne har egenskapen at hvis $f(a) = b$, så er $g(b) = a$.

Litt mer generelt: Anta $f : A \to B$ er injektiv. La
$C = \{c \in B \mid \text{ det finnes } a \in A \text{ med } f(a) = c\}$.
Da har vi en bijektiv funksjon $f : A \to C$, og
kan vi definere en invers funksjon $g : C \to A$.

Kardinalitet

Vi sier at to mengder A og B har samme *kardinalitet*, hvis det finnes en bijektiv funksjon $u\colon A \to B$.

Eksempel: $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1, 3, 5, 7\}$ har samme kardinalitet

(oppgaver: (a) finn en bijektiv funksjon, (b) hvor mange forskjellige bijektive funksjoner fra A til B finnes det?)

Eksempel: $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$ har samme kardinalitet.

En bijeksjon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ er gitt ved:

f(0) = 0	
f(1) = 1	f(-1)= 2
f(2) = 3	f(-2)= 4
f(3) = 5	f(-3)= 6
⋮	⋮

Fakta (mer om dette på torsdag):
$\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ - (de rasjonale tall) har samme kardinalitet, men

$\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}$ - har ikke samme kardinalitet!
Mengder som er endelige, eller har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$, kalles *tellbare*.

Oppgaver til torsdag

- Gjenkjenne egenskaper ved relasjoner (symmetrisk, transitiv osv).
- Gjenkjenne egenskaper ved funksjoner (injektiv, surjektiv).
- Billedmengden til en funksjon.
- Sammensetning av funksjoner.
- Binær-operasjoner som funksjoner.
- Mer om kardinalitet og (over-)tellbare funksjoner.