TMA4140- 1. forelesning

Mengder og relasjoner

Aslak Bakke Buan

August 24, 2023

Innhold

Mengder

Mengdeoperasjoner

Relasjoner

Oppgaver

Mengder - notasjon

En mengde er en samling av elementer/objekter.
(Vi definerer ikke hva elementer/objekter er.)

Notasjon :

$$x \in M$$

Leses: x er et element i mengden M.

$$y \notin M$$

y er *ikke* et element i mengden M.

NB: Vi bruker alltid krøllparentes $\{\}$ når vi beskriver mengder.

Mengder - notasjon

$$M = \{1, 2, 7\} = \{2, 1, 7\} = \{2, 2, 7, 1, 2, 7\}$$

Vi ignorerer rekkefølge og repetisjoner.

Elementene i en mengde kan selv være mengder.

$$N = \{\{1\}, \{2, 7\}\} \neq \{1, 2, 7\} = M$$

merk: N har to elementer, M har tre.

Vi har

$$1 \in \{1, 2, 7\} \quad \text{men} \quad \{1\} \notin \{1, 2, 7\}$$

og

$$\{1\} \in \{\{1\}, \{2, 7\}\}$$

Viktige mengder

$\emptyset = \{\ \}$ - den tomme mengde

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ - de naturlige tall

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - de hele tall

$\mathbb{R}$ - de reelle tall (tall-linja)

Hvordan beskrive mengder

Mengdebygger-notasjon:
Symbolet | leses: *slik at*.

Eksempler:

$\{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$

$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y \text{ for } y \in \mathbb{N}\} = \{2y \mid y \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ - partall

$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2y + 1 \text{ for } y \in \mathbb{N}\} = \{2y + 1 \mid y \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ - oddetall

Oppgave til torsdag: Hvordan beskrive mengden av alle primtall?

Union, snitt, differanse

A, B mengder.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \notin B\}$$

$$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\} \qquad \{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$$

$$\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$$

Universell mengde og komplement

Elementene/objektene ligger alltid i en eller annen universell mengde U. Noen ganger er det underforstått hva denne mengden er, noen ganger må U spesifiseres. Noen ganger trenger vi ikke vite hva U er.

Komplementet til en mengde A er da

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$$

$$U = \{1, 2, 3, 4\} \quad A = \{2, 3\} \quad \overline{A} = \{1, 4\}$$

Delmengder

A, B mengder

$A \subseteq B$ betyr at elementene i A også er elementer i B

$$\{2, 1\} \subseteq \{1, 2, 3\} \not\subseteq \{2, 3, 4\}$$

$$\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \qquad \emptyset \subseteq \{1, 2\}$$

Hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$ så har vi $A = B$

Oftest er det dette vi bruker når vi skal vise at to mengder er like.

Kartesisk produkt - Kryssprodukt

A, B mengder.

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

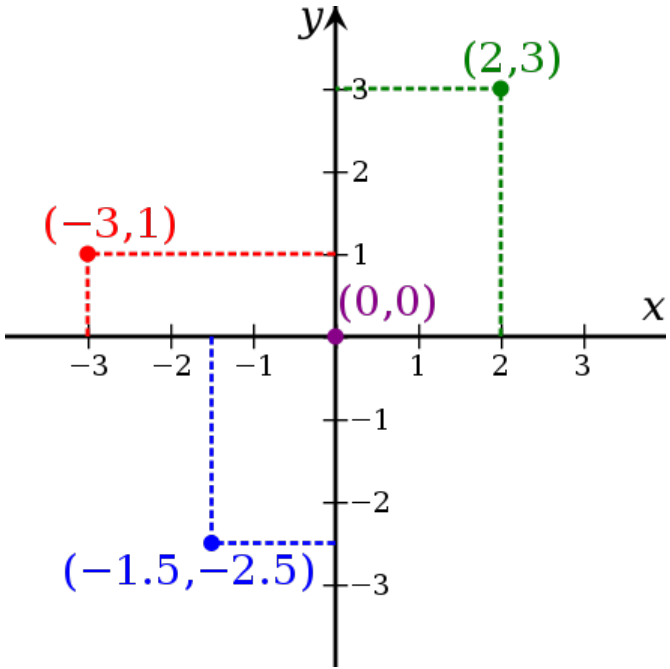
der $\langle a, b\rangle$ er et *ordnet par*. Altså har vi $\langle 1, 2\rangle \neq \langle 2, 1\rangle$.

$$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$$

$$\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$$

Det reelle plan

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



Relasjoner

A, B mengder. En relasjon fra A til B er en delmengde av $A \times B$.

En relasjon på A er en delmengde av $A \times A$.

La $A = \{a, b\}$.
Da er $\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$ en relasjon på A.

La $B = \{1, 2\}$.
Da er $\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$ en relasjon fra A til B.

La $G = \{\langle x, x^2\rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$ og $H = \{\langle y^2, y\rangle \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Da er G og H en relasjon på $\mathbb{R}$.

Kartesisk produkt

A, B, C mengder

$$A \times B \times C = \{\langle a, b, c\rangle \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

der $\langle a, b, c\rangle$ er en *ordnet trippel* (= 3-tuppel).
Om vi har n mengder $A_1, A_2 \ldots, A_n$ har vi at alle n-tupler

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$$

utgjør det kartesiske produkt (kryssproduktet) av mengdene. Notasjon:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Lagt til etter forelesning

Delmengdenotasjon

Symbolet $A \subsetneq B$ er en kort måte at A er en delmengde av B, men ikke lik B.

Så både $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ og $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ er riktige. Men sistnevnte gir altså mer informasjon.

Kryssprodukt

Følgende burde vært nevnt: $A \times B \neq B \times A$, når A og B er ulike mengder.

Eksempel: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$.
Da er $A \times B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$, og $B \times A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$.
(Husk at $\langle 1, 2\rangle \neq \langle 2, 1\rangle$)

Om oppgavene på torsdag

- Venndiagrammer
- Bevis av viktige mengdeligninger
- Øve på bruk av mengdenotasjon (eks: beskriv mengden av primtall)
- Potensmengden til en mengde
- Finne alle relasjoner fra A til B?
- Litt om Russels paradoks (mengdehygiene).