TMA4140- 9. og litt av 10. forelesning

Førsteordens språk

Aslak Bakke Buan

October 23, 2023

Innhold

Utsagnslogikk - repetisjon og begrensninger

Førsteordens språk - syntaks

Tolkning i modeller

Oppfyllbare og falsfiserbare formler

Logisk konsekvens og ekvivalens

Denne uka - og refereansegruppemøte

Denne uka

Ny øving fredag 20.10: Kun skriftlig. Ingen ny Stack-øving denne uka.

Innlevering fredag 20.10, kl 14.00: Både skriftlig og Stack.

Det blir nå $1\frac{1}{2}$ forelesning med Førsteordens språk, og så $\frac{1}{2}$ forelesning med telleresultater/kombinatorikk (mest repetisjon fra ungsomsskolen).

Referansegruppemøte torsdag 12.10

- Om siste undervisningsuke (20-24. november): Mandag blir det repetisjon/oppsummering, torsdag og fredag gjennomgang av prøveeksamen. Denne blir lagt ut ca 16/17. november.
- Det etterlyses flere oppgaver i tallteori.
- Vi vil lage en oversikt over relevante eksamensoppgaver fra de siste (>)5 år. (Siden emnet har variert litt i innhold, er det mange gamle eksamensoppgaver som ikke er relevante for i år.)
- Vi vil legge ut noen relevante videoer fra tallteori-delen.
- Vi vil understreke: Årets øvingsoppgaver og PR-oppgaver er den aller beste eksamensforberedelse, sammen med notater og lærebok/kompendium. Årets øvingsoppgaver gir også en pekepinn på forventet nivå på eksamensoppgaver.
- Det vil bli "spørretjeneste" noen dager siste uke før eksamen (4-8.12).

Husk: Utsagnslogikk

Syntaks i utsagnlogikk: Formler i utsagnslogikk består av: Utsagnsvariabler (som representerer atomære utsagn); konnektivene ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$) ;parenteser.

Eksempel: $\neg(P \vee Q)$.

Valuasjon: Tilordne sannhetsverdier (0/1) til utsagnsvariablene.

Semantikk, tolkning av utsagnslogiske formler. Viktigst: F, G formler. Da sier vi at G er en logisk konsekvens av F (og skriver $F \implies G$) hvis alle valuasjoner som gjør F sann, også gjør G sann.

Eksempel: $(P \wedge Q) \implies (P \vee Q)$.

Begrensninger med utsagnslogikk

Eksempler som ikke kan representeres ved utsagnsvariabler.

$x + 2$ er et partall.

$x + 2$ er et partall for alle x.

Professor A har tykke briller.

For alle x er $x^2 \geq 0$.

For hver $\epsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ slik at når $-\delta < x - a < \delta$ så er $-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$

Vi ønsker å utvide *syntaksen* slik at alle slike setninger kan representeres ved formler.

Vi vil trenge et språk som både har variabler og kvantorene: $\forall$ (for alle) og $\exists$ (det finnes).

Ny syntaks: førsteordens språk

Vi tillater nå (uendelig, men, tellbart mange) variabler: $x, y, z, \ldots$

Vi tillater i tillegg en mengde med konstantsymboler: $a, b, c, \ldots$

NB1: Vi bruker $x, y, z, \ldots$ heller enn $x_1, x_2, x_3, \ldots$ for enklere notasjon, siden vi i våre eksempler oftest har maks tre variabler.

NB2: disse er foreløpig bare symboler, syntaksen sier ikke noe om hva variablene eller konstantsymbolene kan representere.

Frampek: når vi kommer til *modeller* skal vi spesifisere en mengde $\mathcal{D}$, slik at vi for variablene kan substituere (sette inn) vilkårlige elementer i $\mathcal{D}$. Konstantene vil også være elementer i $\mathcal{D}$, men bestemte/valgte elementer. Mengden $\mathcal{D}$ trenger ikke være tellbar.

Funksjonssymboler og relasjonssymboler

Advarsel: Nå kommer det litt abstrakte. Vi vil skille mellom funksjonssymboler og funksjoner, osv.

Et førsteordensspråk har også funksjonssymboler og relasjonssymboler.

NB og frampek: disse er også bare symboler. Når vi kommer til modeller, skal de kunne tolkes som funksjoner og relasjoner på $\mathcal{D}$.

Hvert funksjonssymbol f og relasjonssymbol R har en *aritet*: et heltall $a \geq 0$. Vi skriver gjerne $g(\ ,\ )$ for å markere at funksjonssymbolet g har aritet 2.

Frampek: Hvis funksjonssymbolet f har aritet n, skal f kunne representere en funksjon $\mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$. (Husk $\mathcal{D}^n = \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \cdots \times \mathcal{D}$ - kryssproduktet av n kopier av $\mathcal{D}$).
Hvis relasjonssymbolet R har aritet n, skal R kunne representere en n-ær relasjon på $\mathcal{D}$. (Husk: dvs en delmengde av $\mathcal{D}^n$. Hvis $n = 2$: binær relasjon. Hvis $n = 1$: unær relasjon).

Oppsummering og eksempel

Et førsteordensspråk består av:

- Logiske termer: Konnektivene $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ samt kvantorene: $\forall, \exists$.
- Tellbart mange variabler: x,y,z, ...
- Konstantsymboler.
- Funksjonssymboler.
- Relasjonssymboler.
- Hvert funksjonssymbol og hvert relasjonssymbol har en aritet, som er et heltall ≥ 0.

Et førsteordens språk beskrives altså ved å spesifisere: Konstantsymbolene, funksjonssymbolene med aritet, og relasjonssymbolene med aritet.

Eksempel: La $\mathcal{S}_0$ være et førsteordens språk med ett konstantsymbol a; med to funksjonssymboler f, g, der f har aritet 1, og g har aritet 2; og med to relasjonssymboler P, R der P har aritet 1, og R har aritet 2.

Termer

For et spesifisert førsteordens språk $\mathcal{S}$ er mengden av *termer* en induktivt definert mengde med basismengde: alle variabler og konstantsymboler, og slik at hvis $t_1, \ldots, t_n$ er termer og f er funksjonssymbol med aritet n, er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term.

Eksempel: I eksempelspråket $\mathcal{S}_0$ er da
$a, x, y, f(a), f(x), g(a, x), g(f(x), a), f(f(f(a))), g(y, f(x))$ eksempler på termer.

Merk: Termer inneholder ingen relasjonssymboler, konnektiver eller kvantorer.

Frampek: Når vi kommer til modeller, vil alle termene (som ikke inneholder variabler) være elementer i mengden $\mathcal{D}$.

Atomære formler

La R være en relasjon med aritet n i et spesifisert førsteordens språk $\mathcal{S}$, og la $t_1, \ldots, t_n$ være termer. Da er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

NB: Hvis R har aritet 0, er altså R selv en atomær formel.

Når vi kommer til modeller: vil en relasjon R med aritet 0, bli tolket som en utsagnsvariabel.

Eksempel: I eksempelspråket $\mathcal{S}_0$ er $P(x), P(g(f(x), a)), R(x, g(a, f(f(x))))$ eksempler på atomære formler.

Termer og atomære formler inneholder **ikke** konnektiver eller kvantorer.

Formler

For et førsteordens språk $\mathcal{S}$ er mengden av formler, definert slik at:

- Alle atomære formler er formler.
- Hvis φ og ψ er formler, så er også $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
- Hvis φ er en formel, og x er en variabel, er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ en formel.

I formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ sies alle forekomster av x i φ å være **bundet**, og å være i **skopet** til kvantoren $\forall$ eller $\exists$.

Eksempel: I eksempelspråket $\mathcal{S}_0$ er $(P(x) \wedge R(x, a))$ og $\forall x R(x, a)$ eksempler på formler.

I formelen $P(x) \wedge \forall x R(x, a)$ er den første forekomsten av x ikke bundet til noen kvantor.

Vi sier at en forekomst av en variabel er **fri**, hvis den ikke er bundet av en kvantor. Hvis en formel ikke inneholder noen fri forekomster av noen variable, sier vi at formelen er **lukket**.

Eksempel: I eksempelspråket $\mathcal{S}_0$ er $\forall x R(x, a)$ lukket, mens $\forall x R(x, y)$ ikke er lukket, siden y er en fri forekomst av en variabel. (Husk at a er et konstantsymbol i dette språket).

Modeller - tolkning

En modell $\mathcal{M}$ for et førsteordens språk $\mathcal{S}$, består av:

- En (ikke-tom) mengde $\mathcal{D}$ (kalles **domenet** til modellen).
- For hvert konstantsymbol a i $\mathcal{S}$, et element $a^{\mathcal{M}}$ i $\mathcal{D}$.
- For hvert funksjonssymbol f i $\mathcal{S}$ med aritet n, en funksjon $f^{\mathcal{M}} \colon \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$.
- For hvert relasjonssymbol R i $\mathcal{S}$ med aritet n, en n-ær relasjon $R^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{D}^n$ ($n = 1$ - unær, $n = 2$ - binær).

Eksempel I

La nå $\mathcal{S}_1$ være et språk med konstantsymboler a, b, c, funksjonssymbol f av aritet 1, og relasjonssymboler P og R av aritet 1 og 2.

Velg nå en modell $\mathcal{M}$, der $\mathcal{D}$ er mengden som består av de tre elementene Amal, Bernt, Clara "=" $\{A, B, C\}$

La $a^{\mathcal{M}} = A,\ b^{\mathcal{M}} = B,\ c^{\mathcal{M}} = C$

For funksjonssymbolet f, la $f^{\mathcal{M}}$ være funksjonen bestemt av
$f^{\mathcal{M}}(A) = B,\ \ f^{\mathcal{M}}(B) = C,\ \ f^{\mathcal{M}}(C) = A.$

For relasjonssymbolet P, la $P^{\mathcal{M}}$ være relasjonen $P^{\mathcal{M}} = \{B\}$. NB: Dette er en unær relasjon, altså bare en delmengde av $\mathcal{D}$.

For relasjonssymbolet R, la $R^{\mathcal{M}}$ være den binære relasjonen
$R^{\mathcal{M}} = \{\langle A, A\rangle, \langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, A\rangle\}$, altså en delmengde av $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Representasjon av predikater

Uttrykket "3 er et partall" er et utsagn.

Uttrykket "$x + 2$ er et partall", er ikke et utsagn, men et **predikat**. I det naturlig språket kaller vi x en **plassholder**.

"Professor A har tykke briller", er også et predikat, der A er en plassholder.

Et predikat blir sant eller usant, når hver plassholder blir erstattet med en **verdi**.

Verdi skal bety elementer i mengden som beskriver en gitt modell.

Eksempler

I eksempel I. Tolk $R^{\mathcal{M}}$ som "liker". Altså $\langle x, y \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ tolkes som x liker y.
I denne modellen blir da predikatet: "x liker y" sant hvis $x = A$ og $y = B$, men usant hvis $x = B$ og $y = A$, siden $\langle A, B \rangle \in R^{\mathcal{M}}$, men $\langle B, A \rangle \notin R^{\mathcal{M}}$.

"Alle" liker Amal kan i eksempel I uttrykkes ved

$$\forall x(R(x, a))$$

Tolkning i modeller

Husk I: I utsagnslogikk kan vi gi en formel en valuasjon ved å gi en sannhetsverdi til alle utsagnsvariabler.

Her: Vi skal se at en førsteordens formel får en sannhetsverdi, når vi velger en modell. Termene skal tolkes som elementer i domenet til modellen. En formel er da sann, hvis disse elementene oppfyller relasjonene i formelen.

NB: Når vi skal gjøre dette presist, skal vi gjøre en antagelse, som forenkler begrepene noe. Altså: vi ser ikke på det mest generelle tilfellet.

Husk II: En førsteordens formel er lukket, om den ikke inneholder noen fri variabelforekomster, altså hver variabel som forekommer er bundet til (= i skopet til) en kvantor.

Eksempel: $\forall x R(x, a)$, der a er et konstantsymbol, og R et relasjonssymbol med aritet 2.

Tolkning av termer og atomære formler

Husk: Variabler og konstantsymboler er termer. Og når $t_1, \ldots, t_n$ er termer, er også $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term, når f er et funksjonssymbol med aritet n.

En term kalles **lukket** dersom ingen variabler forekommer.

Husk: Når vi har valgt en modell $\mathcal{M}$, har vi valgt hvordan konstantsymboler og funksjonsymboler og skal tolkes.

En lukket term: $f(t_1, \ldots, t_n)$ skal da tolkes som elementet $f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}})$, som ligger i domenet $\mathcal{D}$ for modellen $\mathcal{M}$.

Merk I: dette er en rekursiv definisjon. Modellen gir oss tolkning av konstantsymboler og funksjonssymboler. Tolkningen av alle andre lukkede termer er så definert induktivt.
Merk II: Viktig: alle lukkede termer tolkes altså som elementer i domenet $\mathcal{D}$ til modellen $\mathcal{M}$.

Eksempel II

La $\mathcal{S}$ være et språk med konstantsymboler a_i for $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, med funksjonssymbol f av aritet 1, og relasjonssymboler P og R av aritet 1 og 2.

Vi velger en modell $\mathcal{M}$, med domene $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, og der $a_i^{\mathcal{M}} = i$.

For funksjonssymbolet f, la $f^{\mathcal{M}}(x) = x + 2 \pmod 6$ for alle $x \in \mathcal{D}$.

For relasjonssymbolet P, la $P^{\mathcal{M}} = \{0, 2, 4\} \subseteq \mathcal{D}$.

For relasjonssymbolet R, la $R^{\mathcal{M}}$ være den binære relasjonen $\{\langle x, y\rangle \mid x < y\} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Tolkning av atomær formel

La $\mathcal{M}$ være en modell for et førsteordens språk $\mathcal{S}$, og la $R(t_1, \ldots, t_n)$ være en lukket atomær formel. Da er formelen sann i modellen $\mathcal{M}$, hvis

$$\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}.$$

Husk: lukket = ingen frie variabelforekomster, atomær = kun én relasjon forkommer.

Eksempel

Eksempel: I eksempelspråket vårt, med modellen fra Eksempel II, altså $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, se på de atomære lukkede formlene

$$P(a_0) \text{ og } P(f(a_0)).$$

De er begge sanne i denne modellen. Fordi a_0 skal tolkes som 0, og $f(a_0)$ skal tolkes som $f^{\mathcal{M}}(0) = 2$, og $P^{\mathcal{M}}$ skal tolkes som mengden $\{0, 2, 4\}$. Siden både $0 \in P^{\mathcal{M}}$ og $2 \in P^{\mathcal{M}}$ er altså formlene sanne.

I samme modell, se på den atomære lukkede formelen

$$R(f(a_0), a_0).$$

Her tolkes $f(a_0)$ og a_0 altså som 2 og 0. Mens $R^{\mathcal{M}}$ tolkes som relasjonen $\{\langle x, y\rangle \mid x < y\} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Siden $2 < 0$ ikke er sann, er altså $\langle 2, 0\rangle = \langle f^{\mathcal{M}}(a_0^{\mathcal{M}}), a_0^{\mathcal{M}}\rangle \notin R^{\mathcal{M}}$, så formelen tolkes som usann i denne modellen.

Substitusjon

Vi har sålangt bare tolket lukkede atomære formler.

Definisjon: La s være en term som inneholder variablen x, og la t være en term. Vi skriver da $s[x/t]$ for termen som framkommer ved å bytte ut (=substituere) alle forekomster av x i s med t.

La φ være en formel som innholder en en fri forekomst av en variabel x. La t være en term. Vi skriver da $\varphi[x/t]$ for termen som framkommer ved å bytte ut (=substituere) alle *fri* forekomster av x i φ med t.

Eksempel

Eksempel: I eksempelspråket vårt fra Eksempel II, se på formelen

$$\varphi : \forall x R(f(x), y)$$

Den inneholder to variabler x, y, men det er ingen frie forekomster av x, begge forekomster er i skopet til $\forall$. Men y forekommer som fri variabel, og vi kan substituere en term for y, feks, a.

Vi får da

$$\varphi[y/a_0] = \forall x R(f(x), a_0)$$

Se nå på formelen $\psi : \neg(\exists x R(f(x), y))$.

Også her er x bundet, men y forekommer som en fri variabel. Se på

$$\psi[y/a_0] = \neg(\exists x R(f(x), a_0))$$

Her er ingen fri variableforekomster.

Kort oppsummering

Det gir ikke mening å snakke om sannhetsverdien til formler som inneholder frie forekomster av variabler. Men når vi i en slik formel substituerer termer for alle variabler som forekommer fritt, får vi en lukket formel. Den har en sannhetsverdi. Vi har sett hva det betyr at en lukket atomær formel er sann. Det gjenstår å se på sannhetsverdien til generelle lukkede formler.

Husk at for et førsteordens språk $\mathcal{S}$ er mengden av formler, definert slik:

- Alle atomære formler er formler.
- Hvis φ og ψ er formler, så er også $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
- Hvis φ er en formel, og x er en variabel, er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ en formel.

Vi skal altså nå se på tolkning av generelle lukkede formler.

Tolkning av lukkede formler

For enklere notasjon, gjør vi nå en antagelse: Vi antar at det for hvert element a i domenet $\mathcal{D}$ til modellen $\mathcal{M}$ finnes et konstantsymbol $\overline{a}$ i språket $\mathcal{S}$, altså slik at $\overline{a}^{\mathcal{M}} = a$.

Anta at $\mathcal{M}$ er en modell for et førsteordens språk $\mathcal{S}$. Vi definerer rekursivt hva det betyr at en *lukket* formel er sann i $\mathcal{M}$. Husk at en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ er sann, hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$. La nå φ og ψ være lukkede formler. Per definisjon har vi da:

- $\neg\varphi$ er sann i $\mathcal{M}$ hvis det ikke er slik at φ er sann i $\mathcal{M}$.
- $(\varphi \wedge \psi)$ er sann i $\mathcal{M}$ hvis det er slik at både φ og ψ er sann i $\mathcal{M}$.
- $(\varphi \vee \psi)$ er sann i $\mathcal{M}$ hvis det er slik at enten φ eller ψ er sann i $\mathcal{M}$.
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ er sann i $\mathcal{M}$ hvis det ikke er slik at φ er sann og ψ usann i $\mathcal{M}$. [Husk $A \rightarrow B$ betyr $\neg(A \wedge \neg B)$].
- $\forall x\varphi$ er sann om det er slik at $\varphi[x/\overline{a}]$ er sann for alle a i domenet $\mathcal{D}$ til $\mathcal{M}$.
- $\exists x\varphi$ er sann om det er slik at $\varphi[x/\overline{a}]$ er sann for minst én a i domenet $\mathcal{D}$ til $\mathcal{M}$.

Eksempel, forts.

Vi ser nå tilbake på eksempel II.

Formelen

$$\varphi : \forall x R(f(x), y)$$

inneholdt fri variabel y, og vi kan nå substituerte alle mulige konstantsymboler for y, feks, a_2 eller a_3.

Vi får da f.eks.

$$\varphi[y/a_3] = \forall x R(f(x), a_3)$$

I modellen vi har valgt er dette et *usant* usagn. Hvis det skulle være sant, måtte $\langle f^{\mathcal{M}}(x), 3\rangle = \langle x + 2, 3\rangle$ være i $R^{\mathcal{M}}$ uansett hvilket tall i $\mathcal{D}$ vi setter inn for x. Men, det er ikke sant om vi setter inn f.eks. 2.
Se nå på formelen

$$\psi : \neg(\exists x R(f(x), y)).$$

For å få en lukket formel, kan vi nå for y substituere f.eks. a_3. Da skal formelen tolkes som: Det finnes ingen x slik at $x + 2 < 3$. Dette er usant, siden $x = 0$ gir et moteksempel. Hvis vi i stedet substituerer a_0 for y, blir formelen sann: Det finnes ingen tall x i $\mathcal{D}$, slik at $x + 2 < 0$.

Oppfyllbar, Falsifiserbar, Tautologi, Motsigelse

Disse begrepene er helt tilsvarende som for utsagnslogikk.

Husk: I utsagnslogikk er en formel oppfyllbar, hvis det finnes en valuasjon slik at den er sann. Hvis den ikke er oppfyllbar, er den en motsigelse.

En formel i utsagnslogikk er falsfiserbar hvis det finnes en valuasjon slik at den er usann. Hvis den ikke er falsifiserbar, er den en tautologi.

Vi har akkurat de samme begrepene for lukkede førsteordens formler. Vi må bare erstatte *valuasjon* med *modell*.

Altså: En førsteordens formel er oppfyllbar, hvis det finnes en modell slik at den er sann. Hvis den ikke er oppfyllbar, er den en motsigelse.

En førsteordens formel er falsfiserbar hvis det finnes en modell slik at den er usann. Hvis den ikke er falsifiserbar, er den en tautologi (boka: gyldig).

Eksempler

La P være et relasjonssymbol av aritet 1. Formelen $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$ er en kontradiksjon.

Hvis den ikke er en kontradiksjon, må den være oppfyllbar. Da må det finnes en modell med et element a i domenet, silk at $P(\bar{a}) \wedge \neg P(\bar{a})$ tolket i $\mathcal{M}$, altså $P^{\mathcal{M}}(a) \wedge \neg P^{\mathcal{M}}(a)$, er sann.

$P^{\mathcal{M}}$ er en unær relasjon, altså bare en delmengde av domenet til $\mathcal{M}$.

$P^{\mathcal{M}}(a)$ betyr $a \in P^{\mathcal{M}}$. Vi kan dermed ikke ha $P^{\mathcal{M}}(a) \wedge \neg P^{\mathcal{M}}(a)$.

La R være et relasjonssymbol av aritet 2. Formelen $\forall x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x)) \rightarrow \forall x R(x,x)$, er en tautologi.

Anta at det finnes en modell slik at $\forall x R(x,x)$ ikke er sann i $\mathcal{M}$. I denne modellen må det da finnes et element a i domenet slik at $R^{\mathcal{M}}(a,a)$ ikke er sann, altså slik at $\langle a,a \rangle \notin R^{\mathcal{M}}$.

Når vi substituerer $\bar{a}$ for både x og y i premisset $\forall x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x))$, og så tolker i $\mathcal{M}$ får vi $R^{\mathcal{M}}(a,a) \vee R^{\mathcal{M}}(a,a)$, som da også må være usann. Altså kan det ikke finnes en modell, som gjør $\forall x R(x,x)$ usann, og $\forall x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x))$ sann, så formelen er en tautologi.

Eksempler

La P og Q være relasjonssymboler av aritet 2. Da er formelen $\forall x \forall y((P(x,y) \wedge P(y,x)) \rightarrow Q(x,y))$ både oppfyllbar og falsifiserbar.

Vi finner først en modell, slik at formelen er sann for denne modellen. Vi ser at hvis P tolkes som $\leq$ og Q tolkes som $=$ for f.eks. naturlige tall $\mathbb{N}$, så holder formelen. Altså, formelt: La $\mathcal{M}$ ha domene $\mathbb{N}$, la $P^{\mathcal{M}} = \{\langle x, y\rangle \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, og la $Q^{\mathcal{M}} = \{\langle x, y\rangle \mid x = y\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Vi vil så finne en modell slik at formelen er usann. Vi kan velge en modell $\mathcal{M}$ med domene $\mathcal{D} = \{\bullet\}$. Vi kan si at $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$ og at $P^{\mathcal{M}} = \{\bullet\} \times \{\bullet\}$.

Eksempler

Se på formelen $\forall y \exists x P(f(x), y)$, der altså f er et funksjonssymbol med aritet 1, og P et relasjonssymbol med aritet 2.

Vi ser at hvis vi har en modell der P tolkes som likhet ($=$). (Altså $P^{\mathcal{M}} = \{\langle t, t \rangle \mid t \in \mathcal{D}\}$, så blir denne formelen sann hvis f er en surjektiv funksjon $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, og usann ellers. Formelen er altså både oppfyllbar og falsifiserbar.

Logisk ekvivalens og konsekvens,

Husk at i utsagnslogikk, er en formel Q en logisk konsekvens av en formel P, hvis hver valuasjon som gjør P sann, også gjør Q sann. Og P og Q er ekvivalente, hvis vi har både at Q er logsik konsekvens av P, og omvendt.

Når P og Q er ekvivalente, er de altså sanne for nøyaktig de samme valuasjoner.

Vi har nøyaktig de samme begrep for førsteordens logikk.

En (førsteordens) formel ψ er en logisk konsekvens av en formel φ hvis hver *modell* som gjør φ sann, også gjør ψ sann. Og: ψ og φ er logisk ekvivalente, dersom begge er logiske konsekvenser av hverandre.

Logisk ekvivalens og konsekvens, forts

Vi skriver $\varphi \implies \psi$ når ψ er en logisk konsekvens av φ.

Legg merke til sammenhengen med $\rightarrow$. At formelen $(\varphi \rightarrow \psi)$ er sann for alle modeller, altså en tautologi, betyr altså det samme som $\varphi \implies \psi$.

Tilsvarende, skriver vi $\varphi \iff \psi$ når de to formlene er ekvivalente, og det betyr altså det samme som at at både $(\varphi \rightarrow \psi)$ og $(\psi \rightarrow \varphi)$ er tautologier.

De Morgans lover

- $\neg\forall x P(x) \iff \exists x \neg P(x)$
- $\neg\exists x P(x) \iff \forall x \neg P(x)$

Bevis for $\neg\forall x P(x) \implies \exists x \neg P(x)$.:
La $\mathcal{M}$ være en modell der $\neg\forall x P(x)$ er sann. I denne modell må da $\forall x P(x)$ være usann. Det betyr per definisjon at det finnes et element a i domenet til $\mathcal{M}$, slik at for det tilhørende konstantstantsymbolet $\overline{a}$ er $P(\overline{a})$ ikke sann (altså $a \notin P^{\mathcal{M}}$).
Når vi substituerer $\overline{a}$ i formelen $P(x)$ får vi altså noe usant, så når vi substituerer $\overline{a}$ i $\neg P(x)$, får vi noe sant. Da har vi vist at for denne modellen, er $\exists x \neg P(x)$ sann.

Oppgave: sjekk at vi også har $\exists x \neg P(x) \implies \neg\forall x P(x)$.