TMA4140- 4. forelesning

Utsagnslogikk

Aslak Bakke Buan

September 11, 2023

Innhold

Utsagnslogikk: syntaks

Utsagnslogikk: semantikk

Utsagn

Et **utsagn**, eller en **påstand** er "noe" som kan være sant eller usant (og alltid utvetydig og nøyaktig én av delene).
"noe" kan være en setning, en ytring, en ligning....

Utsagn:

- Trondheim er en by i Norge
- 2+2 =4
- 2+2 =5
- TMA4140 er en emne på NTNU
- Jeg spiser kjøttboller hver dag.

Ikke-utsagn:

- Gratulerer med dagen
- Kanskje kommer kongen
- 2+2
- Kjøttboller er godt.
- Regner det ute?

Atomære og sammensatte utsagn

Eksemplene vi har sett er *atomære utsagn*.

Vi skal sette sammen atomære utsagn til sammensatte utsagn.

Eksempel: Sola skinner i Trondheim og det er mandag.

Eksempel: Hvis sola skinner, så er jeg glad.

Eksempel: Jeg går til jobb i dag eller jeg tar bussen til jobb i dag.

Syntaks og semantikk

Syntaks: hvordan skal vi uttrykke sammensatte utsagn på en presis og meningsfull måte?

Semantikk: hvordan skal vi tolke sammensatte utsagn? Hvilke sammensatte utsagn betyr egentlig det samme (= logisk ekvivalente utsagn)?

Når er det slik at når et utsagn (A) er sant medfører det at også et annet utsagn (B) er sant (dvs B er en logisk konsekvens av A).

Hvilke sammensatte utsagn kan aldri være sanne (fordi de er selvmotsigende)? Hvilke er alltid sanne (For eksempel: Det regner, eller det regner ikke)?

Konnektivene

Logiske konnektiver:

- $\neg$ ikke - negasjon
- $\wedge$ og - konjunksjon
- $\vee$ eller - disjunksjon
- $\rightarrow$ medfører - implikasjon

NB: det finnes flere, vi klarer oss med disse (og vi kunne klart oss med færre.)

Eksempler

A = Rosenborg vant cupen B = alle trøndere har kjøpt skinnvest

- $\neg B$: Ikke alle trøndere har kjøpt skinnvest
- $A \wedge B$: Rosenborg vant cupen og alle trøndere har kjøpt skinnvest
- $A \vee B$: Rosenborg vant cupen eller alle trøndere har kjøpt skinnvest
- $A \rightarrow B$: Hvis Rosenborg vant cupen, så har alle trøndere kjøpt skinnvest.
- $(\neg A) \rightarrow B$: Hvis Rosenborg ikke vant cupen, så har alle trøndere kjøpt skinnvest.
- $\neg(A \wedge B)$: Det er ikke både slik at Rosenborg vant cupen og at alle trøndere har kjøpt skinnvest.
- $\neg A \wedge B$: Rosenborg vant ikke cupen, og alle trøndere har kjøpt skinnvest.
- $\neg\neg B$: Det er ikke slik at ikke alle trøndere har kjøpt skinnvest.

Implikasjon

$A \to B$ betyr altså det samme som:

- Hvis A er sann, så er B sann
- A medfører B
- At A sann er tilstrekkelig for at B er sann
- At B sann er nødvendig for at A er sann
- A kan ikke være sann uten at B også er sann.

Være obs på forskjellen mellom:

Disse betyr det samme:	A, hvis B	Hvis B, så A	$B \to A$
Disse betyr det samme:	A, bare hvis B	Hvis A, så B	$A \to B$

Eksempel

Eksempel: A= Jeg synger B= Det regner

Jeg synger, hvis det regner. Hvis det regner så synger jeg. $B \rightarrow A$. (Regn er *tilstrekkelig* for at jeg skal synge).

Hvis jeg synger, så regner det. $A \rightarrow B$. (Regn er *nødvendig* for at jeg skal synge).

Variabler og formler

Atomære utsagn representeres ved *utsagnsvariabler*.

Eksempel: A - Jeg synger, B - Det regner

Sammensatte utsagn representers ved utsagnslogiske formler.

Eksempel: $A \rightarrow B$ representer Hvis jeg synger, så regner det.

Eksempel: En *utsagnslogisk formel* er alltid bygd opp ved hjelp av: utsagnsvariabler; konnektiver; parenteser.

Hovedregel: I sammensatte utsagn med flere konnektiver, bruker vi parenteser for konnektivene $\vee, \wedge, \rightarrow$, men vi skriver vanligvis $\neg A$, heller enn $(\neg A)$ også i sammensatte utsagn.

Eksempel: Det regner og jeg synger eller jeg danser.

Eksempel

Eksempel: Det regner og jeg synger eller jeg danser.

A -Det regner B-jeg synger C -jeg danser.

En tolkning, P: (Det regner og jeg synger) eller jeg danser - $(A \wedge B) \vee C$.

En annen tolkning, Q: Det regner og (jeg synger eller jeg danser) - $A \vee (B \wedge C)$.

Disse er forskjellige! Hvis jeg danser, men det ikke regner (og uavhengig om jeg synger eller ikke), så er P sant, men Q er ikke sant.

Derfor: Vi må bruke parenteser!

Parenteser

Sammenlign python-kodene
if $(x > 3$ and $x < 10)$ or $y = 1$: print "success" og

if $x > 3$ and $(x < 10$ or $y = 1)$: print "success"

Disse vil gi forskjellig output for $x = 2$ og $y = 1$

Men: Python vil tolke

if $x > 3$ and $x < 10$ or $y = 1$

som

if $(x > 3$ and $x < 10)$ or $y = 1$:

Hvorfor?

Presedensregler

Det finnes en "plan B", nemlig *presendensregler*.

Når parenteser mangler brukes følgende presendensregler:
Først $\neg$, så $\wedge$, så $\vee$, og tilslutt $\rightarrow$.

Så "(Det regner og jeg synger) eller jeg danser" vil være tolkningen av "Det regner og jeg synger eller jeg danser".

Husk, $*$ (gange) har presendens før $+$, slik at $3 + 4 * 5 = 3 + (4 * 5) = 60$

Men: presendesregler lager krøll!

Hør: Helge Holden på Abels tårn (lenke til Nrk: Abels tårn)

Der diskuteres:

$$48 : 2(9 + 3) =$$

Utsagnslogiske formler er en induktiv mengde

Hvis vi har en endelig mengde med atomære formler (som representerer atomære utsagn), kan mengden av utsagnslogiske formler betraktes som en induktivt definert mengde.

- Basismengden er de **atomære formler**.
- Vi lukker så under konnektivene, altså er mengden av mengden av utsagnslogiske formler den minste mengden X som inneholder de atomære formler, og som er slik at
  - hvis F er i X, så er også $\neg F$ i X.
  - hvis F, G er i F, så er også $(F \wedge G), (F \vee G)$ and $(F \rightarrow G)$ i X.

Sannhetsverdier og valuasjoner

Vi har definert *syntaksen* til utsagnslogikk, altså sett hvordan vi kan bruke et formelt språk til å representere sammensatte utsagn. Atomære utsagn representeres ved utsagnsvariabler, og sammesatte utsagn ved hjelp av formler.

Vi skal nå se på *semantikken*, altså hvordan vi tolker utsagnslogiske formler: Spesielt: når er to formler P og Q *ekvivalente*, dvs. når er det slik at P er sann hvis og bare hvis Q er sann. Og når er det slik at B er en logisk konsekvens av A, altså hvis A er sann, er også B nødvendigvis sann.

Vi lar 1 representere sann og 0 representere usann (kalles sannhetsverdier).
Det er nyttig for å se hvordan sannhetsverdien til en formel varierer med sannhetsverdiene til utsagnsvariblene som inngår.
Når vi tilordner sannhetsverdier til utsagnsvariabler, kaller vi det en *valuasjon*.

Sannhetsverditabeller - konnektivene

Sannhetsverdiene for $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ som funksjon av sannhetsverdiene for A og B, er gitt som følger

A	$\neg$ A
1	0
0	1

A	B	(A $\wedge$ B)
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

A	B	(A $\vee$ B)
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Implikasjon

Hva skal det bety at utsagnet $A \to B$ er sant?

Eksempel: Hvis det regner (A), så tar jeg sydvesten på (B).
Altså A: det regner $\to$ B: jeg tar sydvesten på.

Vi tolker det slik: Vi kan *ikke* ha A og $\neg B$.

Altså: det er aldri slik at det regner, uten at jeg tar sydvesten på.

Altså $A \to B$ er det samme som $\neg(A \wedge \neg B)$.

A	B	$\neg$ B	(A $\wedge\neg$ B)	$\neg$ (A $\wedge\neg$ B)	A $\to$ B
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Altså $A \to B$ er bare usann, når A er sann og B er usann.

Så når A er usann, er altså alltid $A \to B$ sann, uavhengig av hva B er!

Sannhetsverditabeller

For enhver formel F, kan vi lage sannhetsverditabeller, som beskriver hvordan sannhetsverdien til F avhenger av utsagnsvariablene som inngår i F.
(NB: Vi gjør dette litt annerledes enn i boka.)

Eksempel: P, Q, R er utsagnsvariabel. Formel: $P \wedge (Q \vee R)$.

P	Q	R	(Q $\vee$ R)	P $\wedge$($Q \vee R$)
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Logisk ekvivalens - eksempel

Eksempel:
Vi skal se på formlene $P \wedge (Q \vee R)$ og $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

P	Q	R	(Q $\vee$ R)	P $\wedge(Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Vi ser at $P \wedge (Q \vee R)$ og $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ og har samme sannhetsverdier for alle mulige valuasjoner.
Vi sier derfor at disse to formlene *logisk ekvivalente*.

Logisk ekvivalens - definisjon og notasjon

To utsagnslogiske formler F og G er **logisk ekvivalente** hvis de har samme sannhetsverdi for alle valuasjoner (=valg av sannhetsverdier) for utsagnsvariablene.

Notajon: Vi skriver da $F \iff G$, og sier:

-F er sann hvis og bare hvis G er sann

-F er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for G.

Eksempel

Eksempel: $\neg P \vee \neg Q$ er logisk ekvivalent med $\neg(P \wedge Q)$.

P	Q	$\neg$ P	$\neg$ Q	$(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Dermed: $P \vee Q$ er ekvivalent med $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

Altså: vi kunne klart oss uten konnektivet $\vee$, siden vi i alle formler kan ersatte $P \vee Q$ med $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

NB: Vi har tidligere sett at $P \rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg(P \wedge \neg Q)$ per definisjon.
Alle formler kan altså uttrykkes kun ved å bruke konnektivene $\neg$ og $\wedge$.

Logikk formler

- $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributive lover)
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ (De Morgans lover)
- $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$ (Assosiativitet)
- $A \wedge B \iff B \wedge A$
- $A \vee B \iff B \vee A$ (Kommutativitet)
- $\neg(\neg A) \iff A$
- $A \to B \iff \neg A \vee B$
- $\neg(A \to B) \iff A \wedge \neg B$

Logisk konsekvens

Husk: to formler P og Q er ekvivalente om de har samme sannhetsverdi for alle valg av sannhetsverdier for utsagnsvariablene (= valuasjoner). Vi skriver $P \iff Q$.

La P og Q være utsagnslogiske formler.

Vi sier at Q er en logisk konsekvens av P, hvis hver valuasjon som gjør P sann, også gjør Q sann.

Notasjon: $P \implies Q$.

Altså: Å si at P og Q er ekvivalente er da det samme som å si at Q er en logisk konsekvens av P, *og* at P er en logisk konsekvens av Q.

Altså: $P \iff Q$ betyr det samme som ($P \implies Q$ og $Q \implies P$)

Eksempler

La P være formelen $(A \to B) \wedge (B \to C)$, og la Q være $A \to C$.

A	B	C	$(A \to B)$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Altså Q er en logisk konsekvens av P, men det er *ikke* slik at P og Q er logisk ekvivalente.

Oppgave: finn eksempel på utsagn A, B, C som illustrerer dette.

Direkte bevis

Ofte trenger vi ikke å bruke sannhetsverditabeller for å vise at en formel er en logisk konsekvens av en annen.

Eksempel: Formelen $A \vee B$ er en logisk konsekvens av $A \wedge B$.

Hvis $A \wedge B$ er sann, så er er både A og B sanne, og dermed er også $A \vee B$ sann.

Vi skal se flere eksempler på direkte bevis neste uke.

Oppsummering

Vi har sett på syntaks for utsagnslogikk: Utsagnslogiske formler kan uttrykkes ved hjelp av utsagnsvariabler (som representerer atomære utsagn), parenteser og konnektiver ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$).

Og, vi har sett hva det betyr at to utsagnslogiske formler er ekvivalente; og hva logisk konsekvens av utsagnslogiske formler betyr.

På torsdag og i øving

- Øving: Det blir bare STACK-øving denne uka (og bare skriftlig øving neste uke).
- Husk: Øvingsunnlevering fredag kl 14.
- Plenumsregning:
- Det blir litt mer om strukturell induksjon.
- Trene på sannhetsverditabeller, konsekvens og ekvivalens.
- Litt om sammenheng mengdeteori og utsagnslogikk (hvorfor får vi de samme formlene!)

Møte med referansegruppa

- Det går fort og er mye nytt stoff på mandager. Kommentar: enig, men kanskje det roer seg litt nå(?)
- Fredagstimene fungerer bra.
- Boka og nettkurs er bra.
- Det er overfullt på noen øvingstimer. Kommentar: Vi prøver å gjøre endringer her.
- Forelesningene blir ikke filmet/stremaet. Kommentar: Det finnes nettkurs.
- Legg ut forelesningsnotatene tidligere. Kommentar: Skal prøve!
- Det er mye å gjøre på øvingene. Kommentar: Ikke alt trenger å være riktig, men prøv og spør om tilbakemelding!
- Ok med ukentlige innleveringer.
- Wiki-sidene og ov-sys fungerer greit.