TMA4140 Diskret matematikk 2022-08-08

Løsning

Oppgave 1

Utsagn (*i*) er usant, fordi $P(n,n)$ alltid er sann (ethvert positivt heltall er divisor til seg selv).

Utsagn (*ii*) er sant, fordi $P(m,m+1)$ er usann for heltall $m \geq 2$.

Oppgave 2

Fermats «lille» teorem impliserer $3^{22} \equiv 1 \pmod{23}$, siden 23 er primtall og 3 ikke er et multiplum av 23. Dermed er også $3^{22m+k} = (3^{22})^m \cdot 3^k \equiv 3^k \pmod{23}$ for heltall m og k. Videre er $2^9 = 512 = 22 \cdot 23 + 6$, så $3^{2^9} \equiv 3^6 = 729 = 23 \cdot 31 + 16 \equiv 16 \pmod{23}$. Altså er $x = 16$.

Oppgave 3

a. Vi kan tenke på strengen $\alpha = 100$ som ett symbol. Da skal vi lage en streng med seks α og to nuller ($14 - 6 \cdot 2 = 2$), der eneste krav er at det skal stå α først. Dermed står vi igjen med sju plasser som skal fylles med fem α og to nuller. Det kan gjøres på $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ måter.

b. Problemet reduseres til å plassere $17 - 4 \cdot 3 = 5$ identiske gjenstander i fire identiske esker. Siden eskene er identiske, kan de sorteres etter avtagende antall gjenstander. Det blir seks muligheter, nemlig $(5,0,0,0)$, $(4,1,0,0)$, $(3,2,0,0)$, $(3,1,1,0)$, $(2,2,1,0)$ og $(2,1,1,1)$.

Oppgave 4

La $P(n)$ være utsagnet som skal bevises.

$P(1)$ er $\frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}$, som er sann.

Anta at k er slik at $P(k)$ er sann. Da er

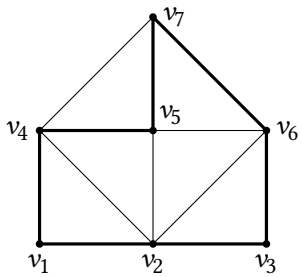
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{k+1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}},\end{aligned}$$

så $P(k+1)$ er også sann. Dermed er $P(n)$ sann for alle positive heltall n.

Oppgave 5

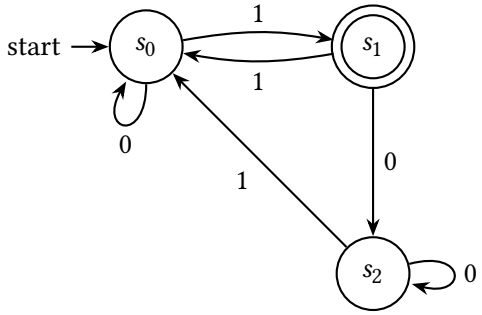
a. Begge grafene har to noder med grad 3 og fire noder med grad 4. Men de to nodene av grad 3 i G_2 er naboer (w_3 og w_6; de er forbundet med en kant), men nodene v_2 og v_6 i G_1 er ikke naboer. Derfor er grafene ikke isomorfe. *Alternativt* kan man legge merke til at G_2 inneholder en kopi av den komplette grafen K_4 (w_1, w_2, w_4, w_5), mens G_1 ikke gjør det.

b. Grafen har en Hamiltonkrets, vist nedenfor. (Sammen med speilbildet er det eneste løsning, hvis man ser bort fra hvor kretsen starter og ender, og hvilken retning den går.)



Oppgave 6

Nedenfor er en automat som gjenkjenner språket. Kort beskrivelse av tilstandene: s_0: Har sett et partall antall enere så langt. s_1 og s_2: Har sett et odde antall enere så langt, og hvilken av de to tilstandene avhenger av om det siste symbolet var en ener (s_1) eller en null (s_2).



Vi tror denne løsningen er den eneste mulige med tre tilstander, men *helt* sikre er vi ikke.

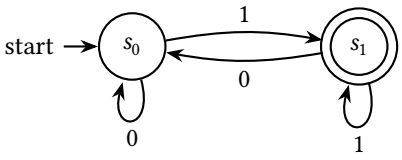
Oppgave 7

a. Input kan starte med et vilkårlig antall nuller (inklusive ingen) etterfulgt av et vilkårlig antall enere (inklusive ingen). Sagt på en annen måte: Input-strengen må tilhøre 0^*1^*. Ekvivalent: Input kan ikke inneholde strengen 10.

b. M gjenkjenner alle strenger som ender på en ener. Et regulært uttrykk for det tilhørende språket er $(0 \cup 1)^*1$.

Merknad – *ikke en forventet del av løsningen*: Automaten i oppgaven er ikke den mest effektive for dette svært enkle språket. Det vises også når man prøver å lage et regulært språk for den med en mer «mekanisk» metode: For å komme til s_1 første gang, må automaten se input fra 0^*1. Derfra kan den komme tilbake til s_1 enten ved en ener, eller via s_2 med 01, eller via s_2 og s_0 med 000^*1. Setter vi dette sammen får vi det regulære uttrykket $0^*1(1 \cup 01 \cup 000^*1)^*$. Men det er jo klart at $1 \cup 01 \cup 000^*1 = 0^*1$, så vi får det enklere uttrykket $0^*1(0^*1)^*$. Det kan i sin tur skrives som $(0^*1)^*0^*1$ (begge deler er bare minst én repetisjon av 0^*1), og til sist kan man forenkle $(0^*1)^*0^*$ til $(0 \cup 1)^*$, og ende opp med uttrykket vi ga opprinnelig.

Her er en enklere automat som gjenkjenner samme språk:



Send en mail til Harald Hanche-Olsen (`harald.hanche-olsen@ntnu.no`*) hvis du finner feil i løsningen, eller har forslag til forbedringer.* Men merk at løsningen er knapt formulert med vilje.