

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4140 Diskret matematikk**

Fagleg kontakt under eksamen: Christian Skau^a, Mads Sandøy^b

Tlf: ^a979 65 057, ^b909 29 809

Eksamensdato: 11. desember 2021

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C

Bestemt, enkel kalkulator

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Annan informasjon:

Eksamenssettet består av to delar, som kvar tel 50%. Den første delen er oppgåve 1 til 8, med i alt ti punkt, som alle tel like mykje. Den andre delen er oppgåve 9 til 16. Desse er fleirvalsoppgaver. Nærare instruksar angående desse finn du på side 3.

(Oppgåve 11 inneheldt ein trykkfeil, som er retta i denne utgåva. Studentane vart informerte om feilen under eksamen.)

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 4

Sidetal vedlegg: 1

Del 1: Tekstoppgåver

Oppgåve 1 Teikn det rotfesta treet (rooted tree) som representerer uttrykket

$$\frac{x^3 - (4 + 3y)}{5 + x^7}$$

og skriv ned postfiks-forma til uttrykket.

Oppgåve 2 Finn s med $0 < s < 113$ slik at

$$101 \cdot s \equiv 1 \pmod{113}$$

og illustrér korleis du finn s ved å bruke Euklids algoritme.

Oppgåve 3 Vis ved induksjon at

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

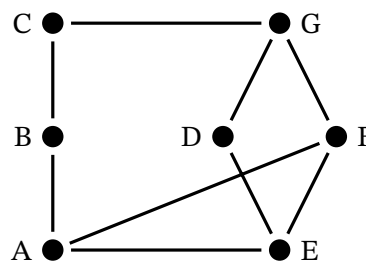
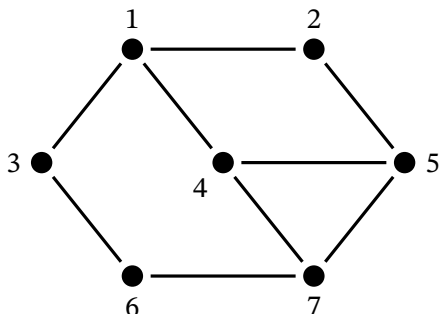
for alle $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Oppgåve 4 Kor mange positive heiltal mindre enn ein million har siffersum lik 8, der tala er skrivne i desimalsystemet? Gje ei kortfatta forklaring av framgangsmåten!

(Eksempel: Tala 20141 og 83501 har siffersum respektive $2 + 0 + 1 + 4 + 1 = 8$ og $8 + 3 + 5 + 0 + 1 = 17$.)

Oppgåve 5 Dei to enkle uretta grafane vist i figuren er isomorfe. Angi eksplisitt ein isomorfi

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$



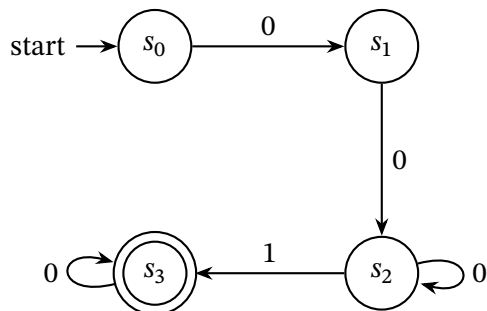
Oppgave 6 Teikn ein deterministisk automat med høgst fire tilstandar som kjenner att det regulære språket representert ved det regulære uttrykket $(01 \cup 10)^*$.

Oppgave 7

a) Beskriv i ord det regulære språket som er representert ved det regulære uttrykket

$$(0^*10^*1)^*0^*10^*$$

b) La $M = (S, I, f, s_0, F)$ vere den endelege ikkje-deterministiske tilstandsautomaten vist i figuren, der $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$ og $F = \{s_3\}$.



Beskriv produksjonane P til ein regular grammatikk $G = (V, T, \tilde{S}, P)$, der $V = \{\tilde{S} = A_{s_0}, A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$ og $\tilde{S} = A_{s_0}$ er startsymbolet, slik at $L(M) = L(G)$.

c) Utvid tilstandsautomaten i punkt **b** ved å føye til passende kantar (dvs. utvide overgangsfunksjonen f) slik at ein får ein deterministisk tilstandsautomat \bar{M} , slik at $L(\bar{M})$ er det regulære språket i punkt **a**.

Oppgave 8 La M vere ein (deterministisk eller ikkje-deterministisk) endeleg tilstandsautomat med fem tilstandar, der inputalfabetet er $\{0, 1\}$. Anta at $0^61^6 \in L(M)$. Vis at det finst $k > 6$ slik at $0^k1^6 \in L(M)$.

Del 2: Fleirvalsoppgåver

Dei siste åtte oppgåvene er fleirvalsoppgåver. Det er fire svaralternativ på kvar, minst eitt av dei er riktig. *Sjòlv om eit spørsmål er stilt i eintalsform, kan det vere meir enn eitt riktig svaralternativ på oppgåva.* Det er i alt ti riktige svaralternativ oppgitt.

Siste side i eksamenssettet er eit skjema der du skal krysse av for svar du meiner er riktige. Du får eitt poeng for kvart kryss på eit riktig svar. Du får ikkje minuspoeng for å krysse av eit feil svar, men om du set fleire enn ti kryss, får du tre minuspoeng for kvart ekstra kryss.

Siste side skal du rive av, merke med kandidatnummer og levere saman med resten av svararka dine.

Oppgåve 9 Kva for alternativ er logisk ekvivalent med $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$?

A: $\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$

B: $(p \rightarrow p) \leftrightarrow \neg r$

C: $\neg((\neg q \vee r) \wedge p)$

D: $(r \vee \neg r) \wedge ((p \vee q) \wedge q)$

Oppgåve 10 Kva for utsegn er sant?

A: $(2159)_{10} = (53D)_{16} + (232)_{16}$

B: Det finst tre distinkte primtal p, q og r slik at $rp \equiv 1 \pmod{q}$

C: Postfiksuttrykket $12 + 3 \uparrow 9 - 32 * /$ har verdien 4

D: $\forall p \exists r \forall q \forall s \left((r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}) \rightarrow (s^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}) \right)$,
der universalmengda er mengda av alle primtal

Oppgåve 11 Kva er a_{15} , gitt rekurrensrelasjonen

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \text{for } n \geq 2$$

der $a_0 = -1$ og $a_1 = 5$?

A: 4782967

B: 14348905

C: 14348909

D: 4782971

Oppgåve 12 Kva for $x \in \mathbb{Z}$ er ei løysing av

$$x \equiv 2^{343} + 5 \pmod{31}?$$

- A:** $x = 14$
- B:** $x = 45$
- C:** $x = 12$
- D:** $x = -18$

Oppgåve 13 Den regulære grammatikken $G = (V, T, S, P)$ er gitt ved at $V = \{A, B, S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S er startsymbolet, og produksjonane P er gitte ved $S \rightarrow 0A$, $S \rightarrow 1A$, $A \rightarrow 0B$, $B \rightarrow 1A$, $B \rightarrow 1$. Kva for regulært uttrykk beskriv språket $L(G)$ generert av G ?

- A:** $(\lambda \cup 1)(01)^*$
- B:** $01(01)^*$
- C:** $(0 \cup 1)(01)^*$
- D:** $(0 \cup 1)(01)(01)^*$

Oppgåve 14 Kva er koeffisienten til x^5y^4 i ekspansjonen av $x^2y(2x - 3y)^6$?

- A:** -4320
- B:** -4860
- C:** 4860
- D:** 4320

Oppgåve 15 Kva for utsegn er sant?

- A:** La R vere den delvise ordninga gitt ved delelegheitsrelasjonen på $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$, dvs. $(a, b) \in R$ dersom $a \mid b$. Da er R eit gitter (lattice).
- B:** R er ein ekvivalensrelasjon på mengda $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, der $((a, b), (c, d)) \in R$ dersom $a + d = b + c$.
- C:** Talet på symmetriske relasjonar på ei mengd med tre element er 32.
- D:** Talet på relasjonar som er både refleksive og symmetriske på ei mengd med tre element er 16.

Oppgåve 16 La $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $h = f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kva for utsegn er heilt sikkert sant?

- A:** Dersom h er surjektiv, så er f surjektiv
- B:** Dersom h er surjektiv, så er g surjektiv
- C:** Dersom h er injektiv, så er g injektiv
- D:** Dersom h er injektiv, så er f injektiv

Kandidatnummer:

SVARKUPONG

Kryss av det du meiner er rette svar, inntil 10 kryss. Eit riktig sett kryss gjer eitt poeng, og kvart kryss meir enn 10 gjer -3 poeng. (Du vert ikkje trekt for å sette eit kryss galt.)

Nedanfor er to svarkupongar, i tilfelle du skriv feil i den eine. Dersom du skriv noko i begge kupongane, **sett eit stort kryss over kupongen du ikkje vil ha med**. Dersom begge kupongane er fylt ut og ingen av dei er kryssa over, tel berre den øvste i sensuren.

Merk dette arket med kandidatnummer oppe til høgre, og lever det saman med resten av svararka dine.

(Lever heile arket, heller enn å rive av ein kupong. Halve ark kjem lett bort i prosessen.)

	A	B	C	D
Oppgåve 9				
Oppgåve 10				
Oppgåve 11				
Oppgåve 12				
Oppgåve 13				
Oppgåve 14				
Oppgåve 15				
Oppgåve 16				

	A	B	C	D
Oppgåve 9				
Oppgåve 10				
Oppgåve 11				
Oppgåve 12				
Oppgåve 13				
Oppgåve 14				
Oppgåve 15				
Oppgåve 16				