

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau^a, Mads Sandøy^b

Tlf: ^a979 65 057, ^b909 29 809

Eksamensdato: 11. desember 2021

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Bestemt, enkel kalkulator

Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Annen informasjon:

Eksamenssettet består av to deler, som hver teller 50%. Den første delen er oppgave 1 til 8, med i alt ti punkter, som alle teller like mye. Den andre delen er oppgave 9 til 16. Disse er flervalgsoppgaver. Nærmere instruksjoner angående disse finner du på side 3.

(Oppgave 11 inneholdt en trykkfeil, som er rettet i denne utgaven. Studentene ble informert om feilen under eksamen.)

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 1

Del 1: Tekstoppgaver

Oppgave 1 Tegn det rotfestede treet (rooted tree) som representerer uttrykket

$$\frac{x^3 - (4 + 3y)}{5 + x^7}$$

og skriv ned postfiks-formen til uttrykket.

Oppgave 2 Finn s med $0 < s < 113$ slik at

$$101 \cdot s \equiv 1 \pmod{113}$$

og illustrér hvordan du finner s ved å bruke Euklids algoritme.

Oppgave 3 Vis ved induksjon at

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

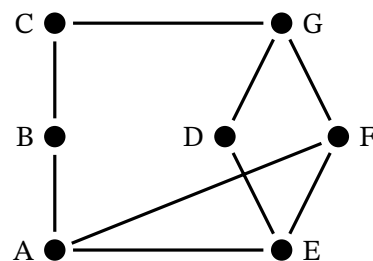
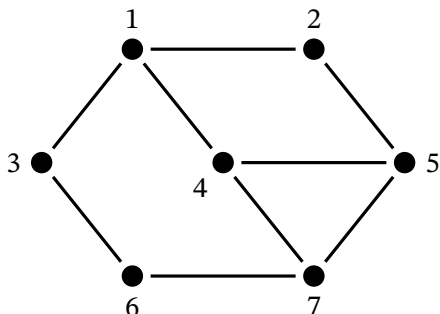
for alle $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Oppgave 4 Hvor mange positive heltall mindre enn en million har siffersum lik 8, der tallene er angitt i desimalsystemet? Gi en kortfattet forklaring av fremgangsmåten!

(Eksempel: Tallene 20141 og 83501 har siffersum henholdsvis $2 + 0 + 1 + 4 + 1 = 8$ og $8 + 3 + 5 + 0 + 1 = 17$.)

Oppgave 5 De to enkle urettede grafene vist i figuren er isomorfe. Angi eksplisitt en isomorfi

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$



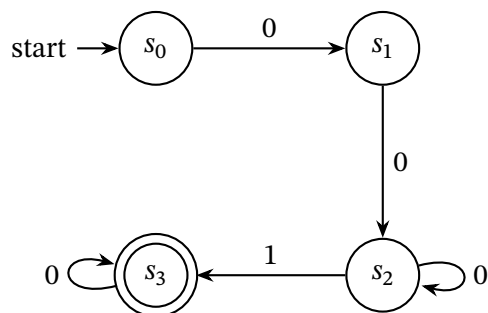
Oppgave 6 Tegn en deterministisk automat med høyst fire tilstander som gjenkjenner det regulære språket representert ved det regulære uttrykket $(01 \cup 10)^*$.

Oppgave 7

a) Beskriv i ord det regulære språket som er representert ved det regulære uttrykket

$$(0^*10^*1)^*0^*10^*$$

b) La $M = (S, I, f, s_0, F)$ være den endelige ikke-deterministiske tilstandsautomaten vist i figuren, der $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$ og $F = \{s_3\}$.



Beskriv produksjonene P til en regular grammatikk $G = (V, T, \tilde{S}, P)$, der $V = \{\tilde{S} = A_{s_0}, A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$ og $\tilde{S} = A_{s_0}$ er startsymbolet, slik at $L(M) = L(G)$.

c) Utvid tilstandsautomaten i punkt **b** ved å føye til passende kanter (dvs. utvide overgangsfunksjonen f) slik at man får en deterministisk tilstandsautomat \bar{M} , slik at $L(\bar{M})$ er det regulære språket i punkt **a**.

Oppgave 8 La M være en (deterministisk eller ikke-deterministisk) endelig tilstandsautomat med fem tilstander, der inputalfabetet er $\{0, 1\}$. Anta at $0^61^6 \in L(M)$. Vis at det finnes $k > 6$ slik at $0^k1^6 \in L(M)$.

Del 2: Flervalgsoppgaver

De siste åtte oppgavene er flervalgsoppgaver. Det er fire svaralternativer på hver, minst ett av dem er riktig. *Selv om et spørsmål er stilt i entallsform, kan det være mer enn ett riktig svaralternativ på oppgaven.* Det er i alt ti riktige svaralternativer oppgitt.

Siste side i eksamenssettet er et skjema der du skal krysse av for svar du mener er riktige. Du får ett poeng for hvert kryss på et riktig svar. Du får ikke minuspoeng for å krysse av et feil svar, men om du setter flere enn ti kryss, får du tre minuspoeng for hvert ekstra kryss.

Siste side skal du rive av, merke med kandidatnummer og levere sammen med resten av besvarelsen din.

Oppgave 9 Hvilket alternativ er logisk ekvivalent med $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$?

A: $\neg(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$

B: $(p \rightarrow p) \leftrightarrow \neg r$

C: $\neg((\neg q \vee r) \wedge p)$

D: $(r \vee \neg r) \wedge ((p \vee q) \wedge q)$

Oppgave 10 Hvilket utsagn er sant?

A: $(2159)_{10} = (53D)_{16} + (232)_{16}$

B: Det finnes tre distinkte primtall p, q og r slik at $rp \equiv 1 \pmod{q}$

C: Postfiksuttrykket $12 + 3 \uparrow 9 - 32 * /$ har verdien 4

D: $\forall p \exists r \forall q \forall s \left((r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}) \rightarrow (s^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}) \right)$,
der universalmengden er mengden av alle primtall

Oppgave 11 Hva er a_{15} , gitt rekurrensrelasjonen

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \text{for } n \geq 2$$

der $a_0 = -1$ og $a_1 = 5$?

A: 4782967

B: 14348905

C: 14348909

D: 4782971

Oppgave 12 Hvilken $x \in \mathbb{Z}$ er en løsning av

$$x \equiv 2^{343} + 5 \pmod{31}?$$

- A: $x = 14$
- B: $x = 45$
- C: $x = 12$
- D: $x = -18$

Oppgave 13 Den regulære grammatikken $G = (V, T, S, P)$ er gitt ved at $V = \{A, B, S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, S er startsymbolet, og produksjonene P er gitt ved $S \rightarrow 0A$, $S \rightarrow 1A$, $A \rightarrow 0B$, $B \rightarrow 1A$, $B \rightarrow 1$. Hvilket av disse regulære uttrykkene beskriver språket $L(G)$ generert av G ?

- A: $(\lambda \cup 1)(01)^*$
- B: $01(01)^*$
- C: $(0 \cup 1)(01)^*$
- D: $(0 \cup 1)(01)(01)^*$

Oppgave 14 Hva er koeffisienten til x^5y^4 i ekspansjonen av $x^2y(2x - 3y)^6$?

- A: -4320
- B: -4860
- C: 4860
- D: 4320

Oppgave 15 Hvilket utsagn er sant?

- A: La R være den delvise ordningen gitt ved delelighetsrelasjonen på $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$, dvs. $(a, b) \in R$ dersom $a \mid b$. Da er R et gitter (lattice).
- B: R er en ekvivalensrelasjon på mengden $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, der $((a, b), (c, d)) \in R$ dersom $a + d = b + c$.
- C: Antall symmetriske relasjoner på en mengde med tre elementer er 32.
- D: Antall relasjoner som er både refleksi-ve og symmetriske på en mengde med tre elementer er 16.

Oppgave 16 La $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $h = f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hvilket utsagn er helt sikkert sant?

- A: Hvis h er surjektiv, så er f surjektiv
- B: Hvis h er surjektiv, så er g surjektiv
- C: Hvis h er injektiv, så er g injektiv
- D: Hvis h er injektiv, så er f injektiv

Kandidatnummer:

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir ett poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir -3 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.)

Nedenfor er to svarkuponger, i tilfelle du skriver feil i den ene. Dersom du skriver noe i begge kupongene, **sett et stort kryss over kupongen du ikke vil ha med**. Hvis begge kupongene er fylt ut og ingen av dem er krysset over, teller bare den øverste i sensuren.

Merk dette arket med kandidatnummer oppe til høyre, og lever det sammen med resten av besvarelsen.

(Lever hele arket, heller enn å rive av en kupong. Halve ark kommer lett bort i prosessen.)

	A	B	C	D
Oppgave 9				
Oppgave 10				
Oppgave 11				
Oppgave 12				
Oppgave 13				
Oppgave 14				
Oppgave 15				
Oppgave 16				

	A	B	C	D
Oppgave 9				
Oppgave 10				
Oppgave 11				
Oppgave 12				
Oppgave 13				
Oppgave 14				
Oppgave 15				
Oppgave 16				