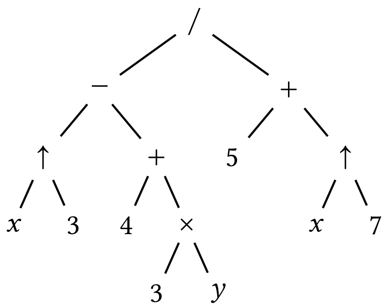
TMA4140 Diskret matematikk 2021-12-11

Løsning

Oppgave 1



Postfiks: $x\,3\uparrow 4\,3\,y\times + - 5\,x\,7\uparrow + /$

Oppgave 2

Vi finner først største felles divisor (som viser seg å være 1) ved Euklids algoritme:

$$\begin{aligned} 113 &= 101 \cdot 1 + 12 \\ 101 &= 12 \cdot 8 + 5 \\ 12 &= 5 \cdot 2 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Vi tar så resultatene derfra i omvendt rekkefølge:

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 5 - 12 \cdot 2 = (101 - 12 \cdot 8) \cdot 5 - 12 \cdot 2 \\ &= 101 \cdot 5 - 12 \cdot 42 = 101 \cdot 5 - (113 - 101 \cdot 1) \cdot 42 \\ &= 113 \cdot (-42) + 101 \cdot 47, \end{aligned}$$

slik at $101 \cdot 47 \equiv 1 \pmod{113}$. Svaret er altså $s = 47$.

Oppgave 3

La $P(n)$ være påstanden

$$P(n): \qquad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\big(\sqrt{n+1} - 1\big)$$

$P(1)$ sier da $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$, som er sant fordi $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Anta som induksjonshypotese at n er slik at $P(n)$ er sann. Vi må vise påstanden

$$P(n+1): \qquad \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{> 2(\sqrt{n+1} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\big(\sqrt{n+2} - 1\big)$$

der ulikheten markert i venstresiden gjelder i følge induksjonshypotesten $P(n)$. Det holder altså å vise at

$$2\big(\sqrt{n+1} - 1\big) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\big(\sqrt{n+2} - 1\big),$$

som vi forenkler til

$$2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2}.$$

Kvadrerer vi begge sider i den uliheten, får vi

$$4(n+1) + 4 + \frac{1}{n+1} \geq 4(n+2),$$

som vi ser er sann. Dermed har vi vist at $P(n+1)$ er sann, og induksjonsbeviset er fullført.

Oppgave 4

Vi kan skrive alle tall mindre enn en million med seks siffer, der vi setter inn ledende nuller der det trengs. (For eksempel kan vi skrive 306 som 000306.) Om $x_1, \ldots, x_6$ er sifrene i tallet, må vi altså finne antall løsninger til

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$$

der hver $x_i \geq 0$. For eksempel 010421 svarer til $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 2$ og $x_6 = 1$. Vi kan også representere dette slik: $|{\star}|\,|{\star}{\star}{\star}{\star}|{\star}{\star}|{\star}$ med $6 - 1 = 5$ stolper og 8 stjerner. Svaret blir da

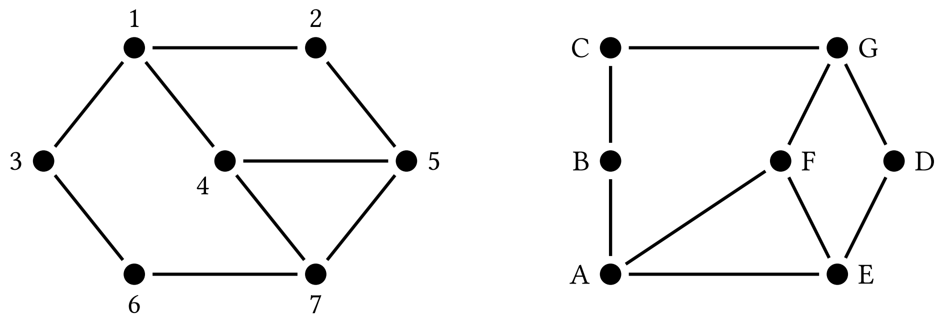
$$C(6+8-1, 8) = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8!\,5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287.$$

Oppgave 5

Rett svar kan oppsummeres i en tabell:

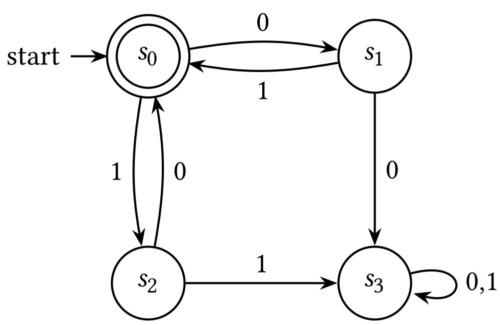
n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	G	D	C	F	E	B	A

Korrespondansen blir nok tydeligere om vi flytter på et par noder i den høyre grafen, slik at kantene ikke krysser hverandre:



Svaret er entydig, som man kan se på forskjellige måter. For eksempel har node 2, 3 og 6 i den venstre grafen, og B, C og D i den andre, grad 2, mens de andre har grad 3. Blant nodene med grad 3 er node 1 og G de eneste som har to naboer av grad 2, så $f(1) = \mathrm{G}$ er nødvendig. Tilsvarende er node 2 og D de eneste nodene i sine respektive grafer som har grad 2, men ingen naboer med grad 2. Sjekker vi så graden til naboene til node 1 og 2 (og G og D), kan vi raskt fylle inn de neste tre kolonnene tabellen. De to siste følger tilsvarende. (Prosessen minner litt om å løse kryssord.)

Oppgave 6

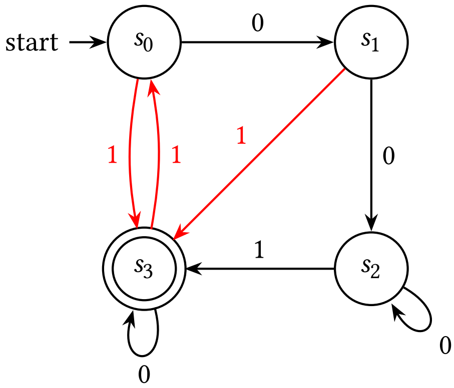


Oppgave 7

a. Språket består av alle strenger i $\{0,1\}^*$ med et odde antall enere.

b. $\tilde{S} \to 0A_{s_1}$, $A_{s_1} \to 0A_{s_2}$, $A_{s_2} \to 0A_{s_2}$, $A_{s_2} \to 1A_{s_3}$, $A_{s_2} \to 1$, $A_{s_3} \to 0A_{s_3}$, $A_{s_3} \to 0$.

c. En mulighet er vist nedenfor. Pilen fra s_3 til s_0 kunne like gjerne gått til s_1 eller s_2 i stedet.



Oppgave 8

Det finnes en vei i M som starter i s_0 og leser av seks nuller, etterfulgt av seks enere. Ved Dirichlets skuffeprinsipp vil den første halvdelen av denne veien gå gjennom samme tilstand minst to ganger. La oss kalle denne tilstanden s_i. Da kan vi forlenge veien ved å følge samme løkke fra s_i til s_i flere ganger, med resultat en vei av lengde $k > 6$. Den forlengede veien vil så akseptere $0^k 1^6$.

Flervalgsoppgavene:

Oppgave 9: C

Oppgave 10: B, D

Oppgave 11: C

Oppgave 12: D

Oppgave 13: D

Oppgave 14: A

Oppgave 15: B

Oppgave 16: A, C