Øvingsforelesning 7

TMA4140 Diskret Matematikk

Oktober 2019

MP18 og relasjoner

Dagen i dag

Merk: Grunnet forskjellig fremgang i parallellene blir det mye repetisjon i dag

- Induksjonsoppgave H17.4
- Egenskaper ved relasjoner
- Ekvivalensrelasjoner
- Delvise ordninger
- Oppgaver fra MP19

H17.4

La $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$; $n \geq 2$, der $a_0 = a_1 = 1$. Vis ved induksjon at a_n er et odde tall for alle $n \geq 0$, og vis så (igjen ved induksjon) at a_{n+1} og a_n er relativt primiske (dvs. $(a_{n+1}, a_n) = 1$) for alle $n \geq 0$.

Egenskaper ved relasjoner I

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for ethvert element $a \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.
- $\mathbb{Z}^+$ og delbarhet, altså $|$.

Egenskaper ved relasjoner II

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *symmetrisk* hvis $(b, a) \in R$ hvis $(a, b) \in R$, for alle $a, b \in A$. En relasjon på en mengde A slik at for alle $a, b \in A$ man har at $(a, b) \in R$ og $(b, a) \in R$ gir at $a = b$ kalles antisymmetrisk.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.
- $\mathbb{Z}^+$ og delbarhet, altså $|$.

Egenskaper ved relasjoner III

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *transitiv* hvis man har at $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ gir at $(a, c) \in R$ for alle $a, b, c \in A$.

Egenskaper ved relasjoner III

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *transitiv* hvis man har at $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ gir at $(a, c) \in R$ for alle $a, b, c \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.
- $\mathbb{Z}^+$ og delbarhet, altså $|$.

Eksamen 2013, oppgave 8.4

La R være relasjonen på $\mathbb{Z}$ definert ved at $(x, y) \in R$ dersom $3 \mid (x + 2y)$, dvs. 3 er en divisor til $(x + 2y)$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er refleksiv.

Alt 2) R er antisymmetrisk.

Alt 3) R er symmetrisk.

Alt 4) R er transitiv.

Ekvivalensrelasjoner I

Definisjon

En relasjon på en mengde A kalles en *ekvivalensrelasjon* hvis den er refleksiv, symmetrisk pg transitiv.

Ekvivalensrelasjoner II: 9.5.O3

Which of these relations on the set of all functions from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$ are equivalence relations? Determine the properties of an equivalence relations that the others lack.

a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$

b) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1) \text{ or } f(0) = g(0)\}$

c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1 \text{ for all } x \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{(f, g) \mid \text{ for some } C \in \mathbb{Z}, \text{for all } x \in \mathbb{Z}, f(x) - g(x) = C\}$

e) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1) \text{ and } f(1) = g(0)\}$

Ekvivalensrelasjoner III: Partisjoner 9.5.045

Which of these are partitions of the set $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ of ordered pairs of integers?

a) the set of pairs (x, y), where x or y is odd; the set of pairs (x, y), where x is even; and the set of apirs (x, y), where y is even

b) the set of pairs (x, y), where both x and y are odd; the set of pairs (x, y) where exactly on of x and y is odd; and the set of pairs (x, y), where both x and y is even

c) the set of pairs (x, y), where x is positive; the set of pairs (x, y), where y is positive; and the set of pairs (x, y), where both x and y are negative

d) the set of pairs (x, y), where $3|x$ and $3|y$; the set of pairs (x, y) where $3|x$ and $3 \not| y$; the set of pairs (x, y) where $3 \not| x$ and $3|y$; and the set of pairs (x, y) where $3 \not| x$ and $3 \not| y$;

Delvise ordninger I

Definisjon

En relasjon R på en mengde S kalles en *delvis ordning* hvis den er refleksiv, antisymmetrisk, og transitiv.

Delvise ordninger II: Hassediagram

Vi ser på relasjonen $\mid$ på mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Delvise ordninger III: 9.6

Oppgaver 25 og 26, side 806-807/630-631.

Delvise ordninger IV: 9.6.O33

Answer these questions for the poset $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$.

a) Find the maximal elements.

b) Find the minimal elements.

c) Is there a greatest element?

d) Is there a least element?

e) Find all upper bounds of $\{3, 5\}$.

f) Find the least upper bound of $\{3, 5\}$.

g) Find all lower bounds of $\{15, 45\}$.

h) Find the greatest lower bound of $\{15, 45\}$, if it exists.

Eksamen 2012, oppgave 8.5

La $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, der $\mathbb{Z}^+$ er de naturlige tallene $\{1, 2, 3, \ldots\}$. La $R \subseteq A \times A$ være relasjonen på A definert ved $((a, b), (c, d)) \in R$ derson $a + d = c + b$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er symmetrisk.

Alt 2) R er en delvis ordning.

Alt 3) R er ikke en ekvivalensrelasjon.

Alt 4) R er transitiv.

Eksamen 2011, oppgave 7.8

La $P(\mathbb{R})$ være mengden bestående av alle ikke-tomme delmengder av de reelle tallene $\mathbb{R}$. La relasjonen R på $P(\mathbb{R})$ være definert ved $(A, B) \in R$ derson det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $a \in A$ og $b \in B$ slik at $|a - b| < \epsilon$. Hvilke av følgende egenskaper har relasjonen R?

Alt 1) R er symmetrisk.

Alt 2) R er antisymmetrisk.

Alt 3) R er refleksiv og symmetrisk.

Alt 4) R er en delvis (eller partiell) ordning.

Å representere relasjoner med matriser I

- Ordnede mengder og matriser

Å representere relasjoner med matriser I

- Ordnede mengder og matriser
- Sammensetning av relasjoner og sammensetning av funksjoner

Å representere relasjoner med matriser I

- Ordnede mengder og matriser
- Sammensetning av relasjoner og sammensetning av funksjoner
- Sammensetning av relasjoner og bolsk multiplikasjon av matriser

Å representere relasjoner med matriser II

Eksempel: $A = \{1, 2, 3\}$.

- $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$
- $S = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (1, 3)\}$

Å representere relasjoner med matriser III: Egenskaper av relasjoner

Eksempel: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- $=$ på A.

Å representere relasjoner med matriser III: Egenskaper av relasjoner

Eksempel: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- $=$ på A.
- $\leq$ på A.

Å representere relasjoner med matriser III: Egenskaper av relasjoner

Eksempel: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- $=$ på A.
- $\leq$ på A.
- R er relasjonen på A gitt av alle par (x, y) s.a. $x + y = 4$.

Å representere relasjoner med matriser III: Egenskaper av relasjoner

Eksempel: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- $=$ på A.
- $\leq$ på A.
- R er relasjonen på A gitt av alle par (x, y) s.a. $x + y = 4$.
- R er relasjonen på A gitt av alle par (x, y) s.a. $x + y \geq 4$.

Etter dette punktet er det definisjoner og resultater relevante for MP18

Se slide tittel.

Kinesisk restteorem I

Theorem

La m_1, m_2 være parvis relativt primiske positive heltall større enn en og a_1, a_2 vilkårlige heltall. Da har systemet

$$x \equiv a_1 \mod m_1$$
$$x \equiv a_2 \mod m_2$$

en unik løsning modulo $m_1 m_2$.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er injektiv siden den er strengt voksende på domenet.

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

d) $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gitt ved $g(x) = x^2$ er surjektiv siden hvert ikke-negativt reelt tall har en reell kvadratrot.

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- $f(x) = 5x^2$ er $O(x^3)$

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- $f(x) = 5x^2$ er $O(x^3)$
- x^n er $O(x^m)$ hvis $n \leq m$ men ikke omvendt!
- Konkret eksempel: x er $O(x^2)$

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$
- Hvis $f(x)$ er $(\Omega(g(x))$, hva annet kan vi si om f og g?

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$
- Hvis $f(x)$ er $(\Omega(g(x))$, hva annet kan vi si om f og g?
- $g(x)$ er $O(f(x))$!

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!
- $x^2 + 2x + 1$ er $\Theta(x^2)$

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!
- $x^2 + 2x + 1$ er $\Theta(x^2)$

Grensemetoden

La $f, g \colon \mathbb{R}/\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ være funksjoner.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0 \implies f(x)$ er $O(g(x))$, og $g(x)$ er *ikke* $O(f(x))$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty \implies g(x)$ er $O(f(x))$, og $f(x)$ er *ikke* $O(g(x))$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = L$, der $0 < L < \infty \implies f(x)$ er $\Theta(g(x))$.

Teoremer

Teorem (2)

Hvis f_1 *er* $O(g_1)$, f_2 *er* $O(g_2)$ *og* g_1 *er* $O(g_2)$, *så er* $f_1 + f_2$ $O(g_2)$.

Teorem (3)

Hvis f_1 *er* $O(g_1)$ *og* f_2 *er* $O(g_2)$, *så er* $f_1 f_2$ $O(g_1 g_2)$.

Teorem (4)

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ *er* $\Theta(x^k)$, *og*
$\log_b(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k)$ *er* $\Theta(\log(x))$.

Liste av funksjoner

- **Viktige funksjoner**: $1, \log n, n, n \log n, n^2, n^3, \cdots, 2^n, n!$
  (Også: side 271.)
- **Merk:** Disse er sortert etter vekstrate/orden.

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Eksempler:

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Eksempler:

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- $a_n = 2a_{n-1} - 9a_{n-2}$

Rekurrensrelasjoner II

- Til en rekurrensrelasjon $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ kan vi assossiere en karakteristisk ligning: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Rekurrensrelasjoner II

- Til en rekurrensrelasjon $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ kan vi assossiere en karakteristisk ligning: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.
- Ideen er at vi leter etter løsninger på formen $a_n = r^n$.

Rekurrensrelasjoner III

Theorem

La c_1 og c_2 være relle tall. Anta at $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ har to distinkte røtter r_1 og r_2. Da er følgen $\{a_n\}$ en løsning av rekurrensrelasjonen $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ hvis og bare hvis $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha r_2^n$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$, hvor α_1 og α_2 er konstanter.