Oppgave 1

a)

$a_2 = 2\cdot 0 + 5\cdot 1 = 5$ $\qquad$ $b_2 = 2\cdot 1 + 5\cdot 0 = 2$

$a_3 = 2\cdot 5 + 5\cdot 0 = 10$ $\qquad$ $b_3 = 2\cdot 2 + 5\cdot 1 = 9$

$a_4 = 2\cdot 10 + 5\cdot 5 = 45$ $\qquad$ $b_4 = 2\cdot 9 + 5\cdot 2 = 28$

$a_5 = 2\cdot 45 + 5\cdot 10 = 140$ $\qquad$ $b_5 = 2\cdot 28 + 5\cdot 9 = 101$

b)

$\alpha a_0 + \beta b_0 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 = \alpha = c_0$ så påstanden holder for $n=0$

$\alpha a_1 + \beta b_1 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 1 = \beta = c_1$ så påstanden holder for $n=1$.

Anta påstanden holder for alle $n \leq k$ og $k \geq 1$. Vil vise at påstanden da holder for $k+1$

$$c_{k+1} = 2\cdot c_k + 5\, c_{k-1} = 2(\alpha a_k + \beta b_k) + 5(\alpha a_{k-1} + \beta b_{k-1})$$

$$= 2\alpha a_k + 5\alpha a_{k-1} + 2\beta b_k + 5\beta b_{k-1}$$

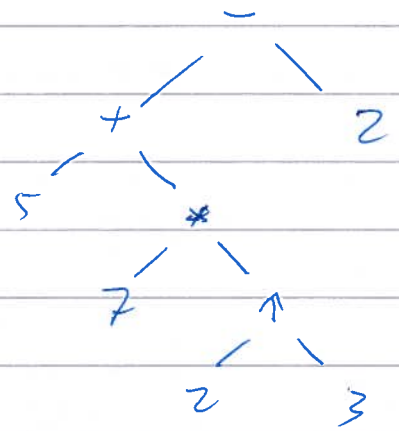
$$= \alpha(2a_k + 5a_{k-1}) + \beta(2b_k + 5b_{k-1})$$

$$= \alpha\, a_{k+1} + \beta\, b_{k+1}$$

Ved induksjon holder påstanden for alle $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 2

a



b $((2^3) \cdot 7 + 5) - 2 = 7 \cdot 8 + 3 = (73)_8$

Oppgave 3

a) $f(a) = f(b) \Rightarrow 7a + 2 = 7b + 2 \pmod{60}$

$\Rightarrow 7a = 7b \pmod{60}$ $\quad \gcd(7, 60) = 1$

så $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}_{60}$ slik at $7 \cdot \alpha \equiv 1 \pmod{60}$

$\alpha 7a \equiv \alpha 7b \pmod{60}$

$a \equiv b \pmod{60} \Rightarrow a = b$ siden

$a, b \in \{0, \dots 59\}$, så f er injektiv

Men da er f også surjektiv siden mengden er endelig, så f er en bijektsjon.

$f^{-1}(b) = \alpha(b - 2) = \alpha b - 2\alpha \pmod{60}$ siden

$f^{-1}(f(a)) = \alpha(f(a) - 2) \bmod 60 = \alpha(7a + 2 - 2) \bmod 60 = \alpha \cdot 7a \pmod{60}$

$= a \pmod{60} = a$

$\forall a \in \mathbb{Z}_{60}$

Kan finne $\alpha = 43$ med Euclids algoritme.

så $f^{-1}(b) = (43b + 34) \bmod 60$.

b) $19 \bmod 5 = 4 \quad 19 \bmod 4 = 3 \quad 19 \bmod 3 = 1$

så løsningen blir $f^{-1}(19) = 11$

Oppgave 4

Ved å la b_1, b_3, b_5, b_7 være en farge og $b_2\ b_4\ b_6\ b_8$ en annen farge ser vi at G' er en bipartitt graf, men i G har vi trekanten

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & a_2 \arrow[d, dash] \\ & a_3 \end{tikzcd}$$

som da ikke er bipartitt, så de to grafene er <u>ikke</u> isomorfe.

Oppgave 5

$8 \mid a-a, \forall a \in \mathbb{Z}_{64}$ så R er refleksiv.

$8 \mid a-b \iff 8 \mid b-a$ så R er symmetrisk

$8 \mid a-b \wedge 8 \mid b-c \implies 8 \mid (a-b)+(b-c) = a-c$ så R er transitiv altså er R ekvivalensrelasjon.

b) $[11]_R = \{3, 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59\}$

Det er 8 ekvivalensklasser $[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]$ og $[7]$

$\{1 \cup 2 \cup 0\{1,2\}^*0\}^*$

Oppgave 6

$$\left| \left\{ ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} x_i = 5 \wedge \sum_{i=1}^{5} y = 8 \right\} \right|$$

$$\binom{5+4}{4} \cdot \binom{8+4}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{12!}{4! \cdot 8!}$$

$$= 9 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{(4!)^2} = 62370$$

Oppgave 7

a) $F = \{s_0, s_4, s_6, s_2\}$

b) Regulært uttrykk. Her er det mange svar som er riktige

~~$(1 \cup 2 \cup 0(1 \cup 2)^* 0)^*$ er et~~

$((1 \cup 2) \cup (0(1 \cup 2)^* 0))^*$