Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

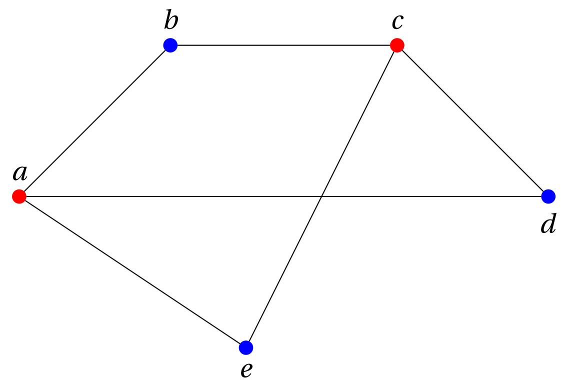
TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2016

Løsningsforslag — Øving 10

Seksjon 10.2

18 La $G = (V, E)$ være en enkel graf med $|V| \geq 2$. Ettersom G er enkel er de mulige verdiene for graden til en node $0, 1, 2, \dots, |V| - 1$. Observer nå at det ikke er mulig å ha to noder v og w med grad henholdsvis 0 og $|V| - 1$. For hvis v er en node med grad 0 er det ingen kant mellom v og w, som betyr at w umulig kan ha grad $|V| - 1$, for i så tilfelle ville det vært en kant mellom w og alle andre noder, spesielt v. Fra dette ser vi at det er $|V| - 1$ mulige verdier graden til en node i G kan ha. Og siden det er $|V|$ noder kan vi slutte ut fra skuffeprinsippet at minst to noder må ha samme grad. $\square$

22 Grafen er todelt med todeling $\{a, c\}$ og $\{b, d, e\}$. Dette ser vi fra 2-fargeleggingen under.



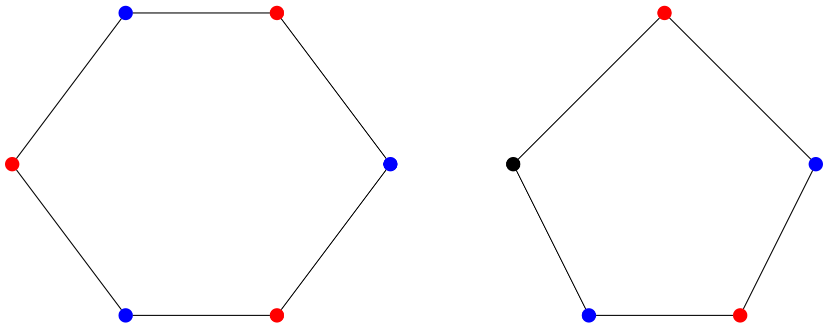
Ved nærmere inspeksjon ser vi at dette faktisk er den komplette todelte grafen $K_{2,3}$.

26 Husk at hvis en graf har K_3 som undergraf er den ikke todelt.

a) K_n er todelt for $n = 1$ og $n = 2$. (Det gir ikke så mye mening å si at grafen med kun én node er todelt, men ifølge definisjonen i boka så er den det.) Når $n \geq 3$ så er ikke K_n todelt fordi den har K_3 som undergraf.

b) C_n, $n \geq 3$, er todelt når n er et partall. Da kan vi nemlig fargelegge annenhver node med rødt og blått og få en 2-fargelegging av C_n. Når n er odde er ikke C_n todelt. Dette er fordi en 2-fargelegging av C_n må ha rødt og blått på annenhver node, men en slik fargelegging kan umulig gå opp når vi har et odde antall noder. Se Figur 1 under.

c) W_n, $n \geq 3$, er aldri todelt siden den har K_3 som undergraf.



Figur 1: Til venstre, en 2-fargelegging av C_6. Til høyre, begynnelsen på en 2-fargelegging av C_5. Denne kan umulig gå opp siden den svarte noden både har en rød og en blå nabo.

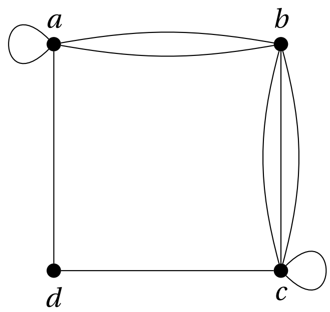
55 Hvis $G = (V, E)$ er en 4-regulær graf med $|E| = 10$ får vi fra Håndhilsningsteoremet (Teorem 1) at

$$20 = 2|E| = \sum_{v \in V} \text{grad}(v) = \sum_{v \in V} 4 = 4|V|.$$

Dermed er $|V| = 5$.

Seksjon 10.3

17 En urettet graf som representeres av nabomatrisen (med hensyn på rekkefølgen a, b, c, d av nodene) er:

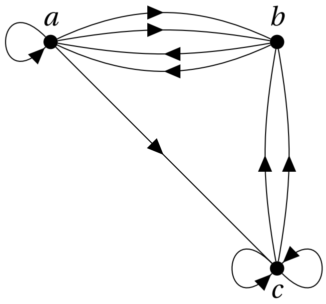


19 Nabomatrisen med hensyn på rekkefølgen a, b, c, d blir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23 Den (rettede) grafen som representeres av nabomatrisen (med hensyn på rekkefølgen

a, b, c av nodene) er:



$\boxed{37}$ La G være grafen til venstre (med noder u_i), og H grafen til høyre (med noder v_i). Begge grafene har 7 noder og hver node har grad 2. Vi ser at kantene i G utgjør en sykel, e.g. $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_1$. Det samme skjer i H hvor en sykel med alle kantene er $v_1, v_3, v_5, v_7, v_2, v_4, v_6, v_1$. Dette forteller oss at G og H har veldig lik struktur og vi kan prøve å skrive ned en isomorfi mellom dem. Vi baserer oss på syklene over og definerer funksjonen f fra nodene i G til nodene i H ved $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_5$, $f(u_4) = v_7$, $f(u_5) = v_2$, $f(u_6) = v_4$, $f(u_7) = v_6$. For å bekrefte at f faktisk er en isomorfi kan vi skrive opp nabomatrisene til G og H med hensyn på rekkefølgen av nodene f gir. Nabomatrisen til G med hensyn på rekkefølgen $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ er:

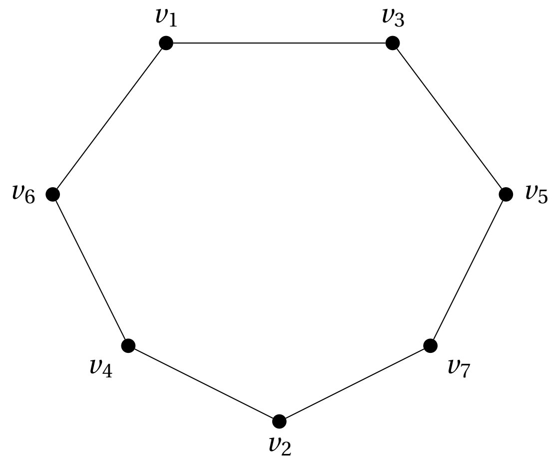
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nabomatrisen til H med hensyn på rekkefølgen $v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6$ er:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Siden disse nabomatrisene er identiske kan vi konkludere med at f er en isomorfi (siden den bevarer naboskap) og følgelig er G isomorf med H.

Alternativt kunne vi tegnet H på følgende måte:

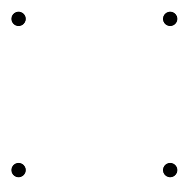


og umiddelbart sett at den var isomorf med G (og at en isomorfi er gitt ved f som over). Merk forøvrig at G (og H) er isomorf med sykel-grafen C_7.

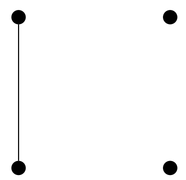
42 La G være den øverste grafen (med noder u_i), og H den nederste grafen (med noder v_i). Begge grafene har 10 noder, 9 kanter, sju noder av grad 1, èn node av grad 3 og to noder av grad 4. I G er de to nodene av grad 4 naboer (u_2 og u_3), mens i H er de ikke naboer (v_2 og v_4). Dermed er G ikke isomorf med H.

54 **c)** For å avgjøre hvor mange enkle (urettede) ikke-isomorfe grafer det finnes med 4 noder tegner vi alle grafene (opp til isomorfi) med et gitt antall kanter. Siden grafen skal være enkel kan det være $0, 1, 2, 3, 4, 5$ eller 6 kanter (den komplette grafen på 4 noder har 6 kanter).

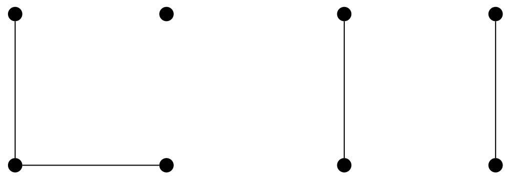
Det finnes èn graf med 0 kanter, nemlig:



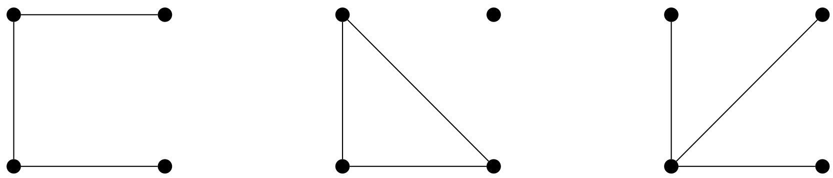
Det finnes også kun èn graf med 1 kant, nemlig:



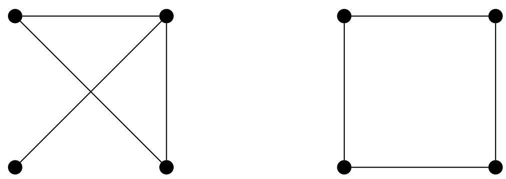
Det finnes to grafer med 2 kanter, disse er:



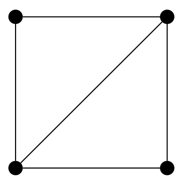
Det finnes tre grafer med 3 kanter, og disse er:



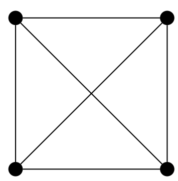
Det finnes to grafer med 4 kanter, og disse er de komplementære grafene til grafene med 2 kanter, som vil si at det har kanter der grafene med 2 kanter ikke har kanter og vice versa. Disse to grafene er:



Tilsvarende finnes det èn graf med 5 kanter, nemlig komplementærgrafen til grafen med 1 kant:



Til slutt finnes det kun èn graf med 6 kanter, nemlig den komplette grafen på 4 noder, dvs. K_4:



Summa summarum finnes det altså $1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$ enkle grafer med 4 noder, opp til isomorfi.

Seksjon 10.4

26 Det finnes 8 stier fra c til d av lengde 3. Disse stiene er:

$$c \to b \to a \to d$$
$$c \to b \to c \to d$$
$$c \to b \to e \to d$$
$$c \to d \to a \to d$$
$$c \to d \to c \to d$$
$$c \to d \to e \to d$$
$$c \to f \to c \to d$$
$$c \to f \to e \to d$$

Alternativt kan man finne antallet stier av lengde 3 ved å regne ut $\mathbf{A}^3$, der $\mathbf{A}$ er nabomatrisa til grafen. Gjør vi det får vi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 7 & 7 & 5 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 9 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 9 & 4 \\ 7 & 10 & 4 & 9 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 7 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Elementet i posisjon (c, d) i $\mathbf{A}^3$ (dvs. 3. rad og 4. kolonne) er 8.

30 La G være en enkel (urettet) graf, og anta at v er en node i G med odde grad. La G_v være sammenhengskomponenten til G som inneholder v. Da er G_v en enkel sammenhengende graf og graden til en node i G_v er den samme som i G (siden G_v er en «isolert del» av G). Fra Teorem 10.2.2 er det et partall antall noder av odde grad i G_v. Siden v har odde grad må det finnes en annen node w i G_v som har odde grad. Siden G_v er sammenhengende finnes det en sti (i G) mellom v og w. □

56 Gitt en graf G med nabomatrise $\mathbf{A}$ og et par av noder v og w, kan vi iterativt (e.g. med en while-løkke) regne ut $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3, \ldots$ helt til vi får et tall forskjellig fra 0 i posisjon (v, w) i $\mathbf{A}^n$. Den minste slike n vil da være lengden på den korteste stien mellom v og w.

For at denne algoritmen faktisk skal terminere må vi på forhånd vite at det finnes en sti fra v til w (som f. eks. er tilfellet om G er sammenhengende).

Seksjon 10.5

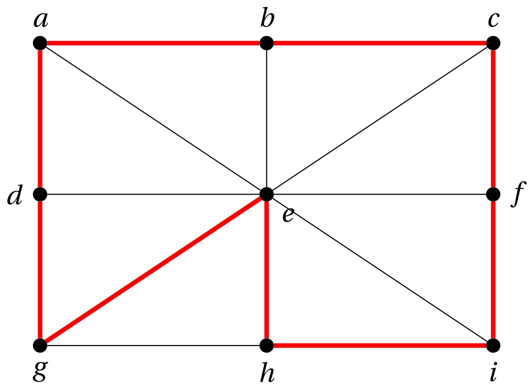
3 Siden grafen har nøyaktig to noder av odde grad, nemlig a og d, har grafen en Eulervei, men ikke en Eulerkrets. For å finne en Eulervei begynner vi en av nodene med odde grad og går helt til vi har trådd alle kantene vi kan uten å gå langs noen kanter to ganger. Om vi

ikke har gått langs alle kantene etter dette gjentar vi prosedyren fra en av nodene i stien fra forrige steg som har en kant vi ikke enda har gått på.

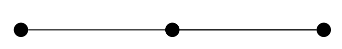
Om vi starter i a og gjør dette blir vi ferdig iløpet av èn runde om vi f. eks. går følgende (Euler)vei: $a, b, d, c, a, e, b, e, c, e, d$.

30 Den eneste måten å komme seg fra den venstre delen av grafen til den høyre (eller motsatt) er ved å bruke kanten $\{c, f\}$. Siden vi da allerede har brukt nodene c og f kan vi ikke komme oss tilbake igjen, så grafen har ingen Hamiltonkrets.

36 Ved litt prøving og feiling finner vi en Hamiltonkrets i denne grafen. En mulig Hamiltonkrets er $a, b, c, f, i, h, e, g, d, a$ som er vist under.



48 Hvis n er et partall så er det å være minst $\frac{n-1}{2}$ det samme som å være minst $\frac{n}{2}$ (siden graden er et heltall). Så for ikke å tilfredsstille antagelsene i Diracs Teorem må vi se på odde n. Det første vi bør se på er er grafer med $n = 3$ noder. Da er $\frac{n-1}{2} = 1$, så alle nodene skal ha minst grad 1, og minst èn node må ha grad 1 for ikke å tilfredsstille Diracs Teorem. Da må vi ha minst 2 kanter. Den eneste enkle grafen (opp til isomorfi) med 3 noder som har 2 kanter er:



Vi ser at denne grafen ikke har noen Hamiltonkrets (og at alle nodene har grad minst 1), så vi har funnet et slikt eksempel som oppgaven spør etter. (Husk at en graf som har en node av grad 1 ikke kan ha en Hamiltonkrets.)

Seksjon 10.6

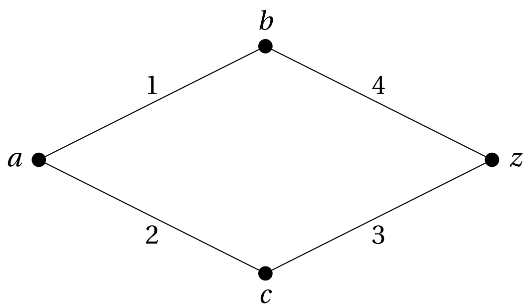
3 Ved inspeksjon ser det ut som den korteste veien mellom a og z er veien a, c, d, e, g, z, som har lengde 16. For å være sikre på dette kjører vi Dijkstras algoritme på grafen. Da får vi følgende tabell (hvor noden vi sier oss ferdig med i starten av hver iterasjon er merket med en «’»):

Iterasjon/node	a	b	c	d	e	f	g	z
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$0'$	4	3	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	4	$3'$	6	9	∞	∞	∞
3	0	$4'$	3	6	9	∞	∞	∞
4	0	4	3	$6'$	7	11	∞	∞
5	0	4	3	6	$7'$	11	12	∞
6	0	4	3	6	7	$11'$	12	18
7	0	4	3	6	7	11	$12'$	16
8	0	4	3	6	7	11	12	$16'$

Altså er lengden til en korteste vei mellom a og z lik 16.

14 For å finne en sti med færrest mulig kanter mellom et par av noder i en urettet (sammenhengende) graf kan vi gi hver kant vekt 1, og kjøre Dijkstras algoritme på den resulterende vektede grafen. Siden hver kant teller like mye vil en korteste vei tilsvare en sti med færrest mulig kanter.

18 Nei, det trenger ikke være en unik korteste vei selv om alle vektene er forskjellige. Betrakt for eksempel følgende vektede graf:



I denne grafen er både a, b, z og a, c, z korteste veier mellom a og z.