Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2016

Løsningsforslag — Øving 8

Seksjon 5.2

4

a) Ved å observere at $18 = 4+2\cdot7$, $19 = 3\cdot4+7$, $20 = 4\cdot5$ og $21 = 3\cdot7$ så ser vi at $P(18)$, $P(19$, $P(20)$ og $P(21)$ er sanne.

b) La nå k være et tall med $k \geq 21$. Induksjonshypotesen er følgende utsagn: For alle j med $18 \leq j \leq k$ kan vi få j cent porto ved bare å bruke 4- og 7-cents frimerker.

c) I induksjonssteget må vi bevise at dersom induksjonshypotesen, **b)**, stemmer, så kan vi få $k+1$ cent i porto ved å kun bruke 4- og 7-cent frimerker.

d) Vi ønsker å få $k+1$ cent i porto. Siden $k \geq 21$ så er $k-3 \geq 18$, så fra induksjonshypotesen vet vi at $P(k-3)$ er sann, dvs. at vi kan få $k-3$ cent i porto. Legger vi til et 4-cent frimerke til så har vi $k+1$ cent, som ønsket.

e) Vi har fullført både basissteget og det induksjonssteget så ved prinsippet om sterk induksjon er utsagnet sant for alle heltall $n \geq 18$.

14

For å forstå hva oppgaven faktisk spør om kan det lønne seg å «tegne seg» gjennom et lite eksempel på egenhånd. Under er et eksempel man kan ta utgangspunkt i.

La oss si vi starter med en haug med $n = 5$ steiner. Hvis vi først deler den inn i to hauger med henholdsvis 2 og 3 steiner får vi et bidrag på $2\cdot3 = 6$. Hvis vi deretter deler haugen med 2 steiner inn i to nye hauger med 1 stein hver får vi et bidrag på $1\cdot1 = 1$. I neste steg må vi dele haugen med 3 steiner inn i en haug med 2 steiner og en haug med 1 stein. Dette gir et bidrag på $2\cdot1 = 1$. Til slutt må vi dele den siste haugen med 2 steiner i to hauger med 1 stein hver. Dette gir et bidrag på $1\cdot1 = 1$. Det totale bidraget ble $6+1+2+1 = 10$, som det skulle bli siden $\frac{5(5-1)}{2} = 10$.

Basissteg: For $n = 1$ er det ingen delinger å utføre så det totale bidraget er $0 = \frac{1(1-1)}{2}$.

Induktivt steg: La nå k være et tall med $k \geq 1$ og anta at følgende holder for alle j med $1 \leq j \leq k$: Hvis man starter med en haug med j steiner så vil enhver sekvens med delinger av denne haugen gi totalt bidrag på $\frac{j(j-1)}{2}$ (induksjonshypotesen).

Vi skal nå vise at enhver sekvens med delinger av en haug med $k+1$ steiner gir totalt bidrag på $\frac{(k+1)((k+1)-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$. Første deling gir to hauger med henholdsvis r og s steiner, der $r+s = k+1$ (og $r, s \geq 1$). Denne delingen gir et bidrag på rs. Siden $1 \leq r \leq k$ og $1 \leq s \leq k$ får vi fra induksjonshypotesen at uansett hvilke delinger vi utfører videre så får vi bidrag på $\frac{r(r-1)}{2}$ fra hugen med r steiner og bidrag på $\frac{s(s-1)}{2}$ fra hugen med s steiner. Det totale bidraget for hele haugen er derfor

$$rs+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}=\frac{2rs+r^2-r+s^2-s}{2}=\frac{(r^2-r+rs)+(s^2-s+rs)}{2}$$
$$=\frac{r(r+s-1)+s(r+s-1)}{2}=\frac{r(k+1-1)+s(k+1-1)}{2}$$
$$=\frac{k(r+s)}{2}=\frac{k(k+1)}{2},$$

som var det vi skulle vise. Ved matematisk induksjon vil enhver sekvens av med delinger av n steiner gi totalt bidrag på $\frac{n(n-1)}{2}$, for alle $n \geq 1$.

Seksjon 5.3

12 *Basissteg:* For $n = 1$ har vi $f_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = f_1 f_2$.

Induktivt steg: La k være et tall med $k \geq 1$ og anta at $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$ (induksjons-hypotesen). Da er

$$\left(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2\right) + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2}.$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. □

18 For de som ikke er kjent med multiplikasjon med matriser så er multiplikasjon av 2×2 matriser gitt ved

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}. \end{bmatrix}$$

Tallet i rad i og kolonne j er altå lik indreproduktet (aka prikkproduktet aka skalarproduktet) av rad i i den første matrisen og kolonne j i den andre matrisen.

Basissteg: For $n = 1$ har vi

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}.$$

Induktivt steg: La k være et tall med $k \geq 1$ og anta at $A^k = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix}$ (induksjonshypotesen). Da er

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix}.$$

Ved matematisk induksjon har vi vist at $A^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ for alle $n \geq 1$. □

Seksjon 5.4

3 Først kjører else-delen av koden og finner at $\gcd(8,13) = \gcd(13\,\mathbf{mod}\,8, 8) = \gcd(5,8)$. Else-delen av koden kjøres så om og om igjen og finner at $\gcd(5,8) = \gcd(8\,\mathbf{mod}\,5, 5) = \gcd(3,5)$, deretter at $\gcd(3,5) = \gcd(5\,\mathbf{mod}\,3, 3) = \gcd(2,3)$, deretter at $\gcd(2,3) = \gcd(3\,\mathbf{mod}\,2, 2)$ og en gang til for å finne at $\gcd(1,2) = \gcd(2\,\mathbf{mod}\,1, 1) = \gcd(0,1)$. Til slutt, for å finne $\gcd(0,1)$, kjører første del av koden med $a = 0$ for å finne at $\gcd(0,1) = 1$. Slik finner algoritmen at $\gcd(8,13) = 1$.

Seksjon 9.1

7 Egenskapene til de ulike relasjonene på heltallene er gjengitt i tabellen under.

	Refleksiv	**Symmetrisk**	**Antisymmetrisk**	**Transitiv**
a)	Nei	Ja	Nei	Nei
b)	Nei	Ja	Nei	Ja
c)	Nei	Ja	Nei	Nei
d)	Ja	Ja	Nei	Ja
e)	Ja	Nei	Nei	Ja
f)	Ja	Ja	Nei	Ja
g)	Nei	Nei	Ja	Nei
h)	Nei	Nei	Ja	Ja

40 Siden relasjonene er på de positive heltallene får vi at

$$(a,b) \in R_2 \iff a = bc \text{ for en } c \in \mathbb{Z}^+ \iff b \mid a.$$

Så R_2 er «speilingen» av R_1. (Dvs. $R_2 = R_1^{-1}$ i notasjonen fra Seksjon 9.3.)

a) Relasjonen $R_1 \bigcup R_2$ består av alle par av positive heltall (a,b) der $a \mid b$ eller $b \mid a$.

c) Relasjonen $R_1 - R_2$ består av alle par av positive heltall (a,b) der $a \mid b$ og $b \nmid a$, med andre ord $a \mid b$ og $a \neq b$.

Seksjon 9.3

10 La $A = \{1,2,3,\ldots,999,1000\}$. Hvis R er en relasjon på A, så vil matrisen som representerer R, M_R, ha $1000^2 = 1\,000\,000$ elementer totalt. For et par $(a,b) \in A \times A$, så lar vi a parametrisere radene og b kolonnene i M_R.

a) For $R = \{(a,b) \mid a \leq b\}$ så er matrisen på formen

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dette fordi $a \leq b$ blir « radnummeret er mindre enn kolonnenummeret». Summerer vi antall enere i hver rad får vi at

$$\#\text{ enere } = 1 + 2 + \cdots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\,500.$$

b) Når $R = \{(a,b) \mid a = b \pm 1\}$ ser vi at et tall a kun er relatert til $a+1$ og $a-1$. Dermed får vi matrisen

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er 999 enere over og under diagonalen så vi får # enere $= 1\,998$.

c) Når $R = \{(a,b) \mid a+b = 1000\}$ ser vi at 1000 ikke er relatert til noen og at $a \neq 1000$ kun er relatert til $1000 - a$. Dermed får vi matrisen

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen har 999 enere.

d) Når $R = \{(a,b) \mid a+b \leq 1001\}$ ser vi at et tall a er relatert med $b = 1,2,3,\ldots 1001-a$. Dermed får vi matrisen

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ved samme argumentasjon som i **a)** ser vi at M_R har $500\,500$ enere.

e) Når $R = \{(a,b) \mid a \neq 0\}$ ser vi at $R = A \times A$ siden $0 \notin A$. Dermed er

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

som har $1\,000\,000$ enere.

$\boxed{14}$ **a)**

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 0 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigwedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 0 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Det vanlige matriseproduktet er

$$M_{R_1} \cdot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra dette ser vi at

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$