Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2018

Løsningsforslag — Øving 7

Seksjon 8.1

11 **a)** Oppgaven spør etter antall måter man kan gå opp n trappetrinn dersom man kan ta ett eller to trappetrinn av gangen. En slik måte å gå opp de n trappetrinnene på kan vi representere ved en bitstreng av lengde n der `1` betyr enkelttrinn og `00` betyr dobbelttrinn. Hvis du for eksempel går 7 trappetrinn ved å første gå ett enkelttrinn, så to dobbelttrinn, så to enkelttrinn, gir dette bitstrengen `1000011`.

Bitstrengene vi ønsker å telle er altså de som kun har `0`-undersekvenser av partalls lengde. (Tenk at du skal bygge strenger av lengde n ved kun å bruke blokkene `1` og `00`.) La nå a_n være antall slike bitstrenger av lengde n. For $n \geq 3$ så vil a_n være summen av de bitstrengene som slutter på `1` og de som slutter på `0`. Antallet som slutter på `1` er lik a_{n-1} fordi en slik streng består av en lovlig streng av lengde $n-1$ hvor det er satt på en `1` på slutten. Antallet som slutter på `0` er det samme som antallet som slutter på `00` (siden det ikke er lov å slutte på `10`), og dette antallet er lik a_{n-2} siden en slik streng består av en lovlig streng av lengde $n-2$ hvor det er satt på `00` på slutten. Fra dette ser vi at

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ for } n \geq 3.$$

b) Initialbetingelsene blir $a_1 = 1$ (eneste mulighet er å gå ett enkelttrinn) og $a_2 = 2$ (man kan enten gå to enkelttrinn eller ett dobbelttrinn).

c) Ved å iterere rekurrensen får vi

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5 \\ &\vdots \\ a_8 &= a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34. \end{aligned}$$

20 **a)** Denne oppgaven er litt upresist formulert i boka. La a_n være antallet måter man kan slippe på femkroner og tikroner på en automat for å betale en avgift på $5n$ kroner, når rekkefølgen spiller en rolle. (I denne konteksten gir det ikke mening å betale en sum som ikke er et multiplum av 5.) Hvis vi representerer en sekvens av myntinnkast som en binærstreng hvor `1` svarer til å legge på en femkrone og `00` svarer til å legge på en tikrone ser vi at dette problemet faktisk er ekvivalent med problemet i forrige oppgave. Følgelig er

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ for } n \geq 3.$$

b) Initialbetingelsene blir $a_1 = 1$ (eneste mulighet er å legge på en femmer) og $a_2 = 2$ (man kan enten legge på en tier eller to femmere), som i forrige oppgave. Antall måter å legge på $45 = 5 \cdot 9$ kroner er

$$a_9 = a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55.$$

Seksjon 8.2

$\boxed{3}$ **c)** Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \qquad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$. Røttene er $r_1 = 3$ og $r_2 = 2$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$1 = a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 2^0 = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{1}$$

$$0 = a_1 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 2^1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2. \tag{2}$$

Fra (1) får vi $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Setter dette inn i (2) og får $0 = 3\alpha_1 + 2(1 - \alpha_1) = \alpha_1 + 2$, altså $\alpha_1 = -2$. Fra (1) får vi $\alpha_2 = 3$. Løsningen blir derfor

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

d) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \qquad a_0 = 6, a_1 = 8.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$. Denne har en dobbel rot $r_0 = 2$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$a_0 = \alpha_1 = 6,$$
$$a_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 8.$$

Vi ser at $\alpha_1 = 6$ og $\alpha_2 = -2$, så løsningen er

$$a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n2^n = (3 - n)2^{n+1}.$$

e) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \qquad a_0 = 0, a_1 = 4.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$. Denne har en dobbel rot $r_0 = -2$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 n(-2)^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$a_0 = \alpha_1 = 0,$$
$$a_1 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 1.$$

Vi ser at $\alpha_1 = 0$ og $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, så løsningen er

$$a_n = -\frac{1}{2}n(-2)^n = n(-2)^{n-1}.$$

g) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}, \qquad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$. Røttene er $r_1 = \frac{1}{2}$ og $r_2 = -\frac{1}{2}$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$
$$a_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 = 0.$$

Vi løser systemet og får $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Løsningen blir derfor

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (1 + (-1)^n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$\boxed{6}$ Ved å representere det første signalet (som bruker ett nanosekund) som blokken `1`, det andre signalet (som bruker to nanosekunder) som blokken `22` og det siste signalet (som også bruker to nanosekunder) som blokken `33`, så ser vi at antall beskjeder som kan sendes på n nanosekunder tilsvarer antall ulike strenger som kan lages ved å bruke blokkene `1`, `22` og `33`. La nå a_n være antallet slike strenger av lengde n.

Tilsvarende som i oppgave 8.1.11 så ser vi at a_n er summen av de strengene som slutter på `1`, de som slutter på `22` og de som slutter på `33`. Antallet av hver av disse strengene er henholdsvis a_{n-1}, a_{n-2} og a_{n-2}. Ergo har vi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ for $n \geq 3$. Videre har vi at $a_1 = 1$ (eneste streng er `1`) og $a_2 = 3$ (mulige strenger er `11`, `22` og `33`).

Den karakteristiske ligninen er

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0.$$

Røttene er $r_1 = 2$ og $r_2 = -1$, så løsningen er på formen $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$. Initialbetingelsene gir

$$a_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 = 1,$$
$$a_2 = 4\alpha_1 + \alpha_2 = 3.$$

Ved å løse systemet over finner vi $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ og $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. Dermed er løsningen

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

11 **a)** Vi skal vise at $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ for alle $n \geq 2$, der f_n er det n'te Fibonacci-tallet. Denne oppgaven løses enklest ved å bruke (sterk) induksjon.

Basissteg: Viser at det stemmer for $n = 2$ og $n = 3$.

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 + L_0 = 1 + 2 = f_1 + f_3, \\ L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 1 = f_4 + f_2. \end{aligned}$$

Induksjonshypotesen: La $n \geq 3$ og anta at påstanden holder for $k = 2, 3, \ldots, n$, dvs. at $L_k = f_{k-1} + f_{k+1}$ når $k \leq n$.

Induksjonssteget: Vi må vise at påstanden holder for $k = n+1$. Ved å bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} = (f_{k-1} + f_{k+1}) + (f_{k-2} + f_k) \\ &= (f_{k-1} + f_{k-2}) + (f_{k+1} + f_k) = f_k + f_{k+2}. \end{aligned}$$

Så påstanden holder for $k = n+1$. Ved matematisk induksjon har vi nå vist at $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ for alle $n \geq 2$. □

b) Rekurrensligningen for Lukastallene har den karakteristiske ligningen $r^2 - r - 1 = 0$, som har røttene $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Løsningen er på formen

$$L_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved å bruke initialbetingelsene

$$\begin{aligned} L_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \\ L_1 &= \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ved å løse ligningssystemet får vi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Dermed får følgende eksplisitte formel for Lukas-tallene:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

42 Vi skal vise at rekurrensligningen $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ med initialbetingelsene $a_0 = s$ og $a_1 = t$, der s og t er (kjente) konstanter, har løsningen $a_n = sf_{n-1} + tf_n$ for $n \geq 1$, der f_n er det n'te Fibonacci-tallet. For å gjøre dette bruker vi (sterk) induksjon.

Basissteg: Viser at det stemmer for $n = 1$ og $n = 2$.

$$\begin{aligned} s \cdot f_0 + t \cdot f_1 &= s \cdot 0 + t \cdot 1 = t = a_1, \\ s \cdot f_1 + t \cdot f_2 &= s \cdot 1 + t \cdot 1 = s + t = a_0 + a_1 = a_2. \end{aligned}$$

Induksjonshypotesen: La $n \geq 2$ og anta at påstanden holder for $k = 1, 2, \ldots, n$, dvs. at $a_k = sf_{k-1} + tf_k$ når $k \leq n$.

Induksjonssteget: Vi må vise at påstanden holder for $k = n+1$. Ved å bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = (sf_{n-1} + tf_n) + (sf_{n-2} + tf_{n-1}) \\ &= s(f_{n-1} + f_{n-2}) + t(f_n + f_{n-1}) = sf_n + tf_{n+1}. \end{aligned}$$

Så påstanden holder for $k = n+1$. Ved matematisk induksjon har vi nå vist at $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ med initialbetingelsene $a_0 = s$ og $a_1 = t$ har løsningen $a_n = sf_{n-1} + tf_n$ for $n \geq 1$. □

Seksjon 5.1

$\boxed{4}$ **a)** $P(1)$ er utsagnet $1^3 = (1\cdot(1+1)/2)^2$.

b) Begge sider i uttrykket over er lik 1.

c) Induksjonshypotesen er utsagnet

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

d) I induksjonssteget ønsker vi å bevise at for enhver $k \geq 1$ så er det slik at dersom $P(k)$ er sann, så impliserer det at $P(k+1)$ er sann. Vi ønsker altså å bevise at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

når likheten i **c)** holder.

e) Ved å bruke induksjonshypotesen i den første likheten nedenfor får vi

$$\begin{aligned}\left(1^3 + 2^3 + \cdots + k^3\right) + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

f) Vi har fullført både basissteget og det induksjonssteget, så ved prinsippet om matematisk induksjon følger det at utsagnet er sant for alle positive heltall n, altså holder formelen for alle n.

$\boxed{6}$ *Basissteg:* Når $n = 1$ har vi $1\cdot 1! = 1 = 2! - 1$.

Induktivt steg: Anta nå at $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$ for en $k \geq 1$ (induksjonshypotesen). Da er

$$\begin{aligned}(1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k!) + (k+1)\cdot(k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)! \\ &= (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+2)! - 1.\end{aligned}$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. □

$\boxed{14}$ I oppgaveteksten brukes k som summasjonsvariabel, så derfor bør vi bruke en annen variabel i induksjonssteget; for eksempel n.

Basissteg: For $n = 1$ har vi $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k\cdot 2^k = 1\cdot 2^1 = 2 = 0 + 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$.

Induktivt steg: Anta nå at $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ for en $n \geq 1$ (induksjonshypotesen). Vi skal vise at

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^k = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2 = n\cdot 2^{n+2} + 2.$$

Ved å splitte summen og bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k\right) + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2 = 2n \cdot 2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} + 2.\end{aligned}$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. $\square$