



Seksjon 8.1

- 11 a) Oppgaven spør etter antall måter man kan gå opp n trappetrinn dersom man kan ta ett eller to trappetrinn av gangen. En slik måte å gå opp de n trappetrinnene på kan vi representere ved en bitstreng av lengde n der 1 betyr enkelttrinn og 00 betyr dobbeltrinn. Hvis du for eksempel går 7 trappetrinn ved å første gå ett enkelttrinn, så to dobbeltrinn, så to enkelttrinn, gir dette bitstrengen 1000011.

Bitstrengene vi ønsker å telle er altså de som kun har 0-undersekvenser av partalls lengde. (Tenk at du skal bygge strenger av lengde n ved kun å bruke blokkene 1 og 00.) La nå a_n være antall slike bitstrenger av lengde n . For $n \geq 3$ så vil a_n være summen av de bitstrengene som slutter på 1 og de som slutter på 0. Antallet som slutter på 1 er lik a_{n-1} fordi en slik streng består av en lovlig streng av lengde $n-1$ hvor det er satt på en 1 på slutten. Antallet som slutter på 0 er det samme som antallet som slutter på 00 (siden det ikke er lov å slutte på 10), og dette antallet er lik a_{n-2} siden en slik streng består av en lovlig streng av lengde $n-2$ hvor det er satt på 00 på slutten. Fra dette ser vi at

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ for } n \geq 3.$$

- b) Initialbetingelsene blir $a_1 = 1$ (eneste mulighet er å gå ett enkelttrinn) og $a_2 = 2$ (man kan enten gå to enkelttrinn eller ett dobbeltrinn).
c) Ved å iterere rekurensen får vi

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

⋮

$$a_8 = a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34.$$

- 20 a) Denne oppgaven er litt upresist formulert i boka. La a_n være antallet måter man kan slippe på femkroner og tikroner på en automat for å betale en avgift på $5n$ kroner, når rekkefølgen spiller en rolle. (I denne konteksten gir det ikke mening å betale en sum som ikke er et multiplum av 5.) Hvis vi representerer en sekvens av myntinnkast som en binærstreng hvor 1 svarer til å legge på en femkrone og 00 svarer til å legge på en tikrone ser vi at dette problemet faktisk er ekvivalent med problemet i forrige oppgave. Følgelig er

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ for } n \geq 3.$$

- b) Initialbetingelsene blir $a_1 = 1$ (eneste mulighet er å legge på en femmer) og $a_2 = 2$ (man kan enten legge på en tier eller to femmere), som i forrige oppgave. Antall måter å legge på $45 = 5 \cdot 9$ kroner er

$$a_9 = a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55.$$

Seksjon 8.2

- 3 c) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 5r + 6 = (r - 3)(r - 2) = 0$. Røttene er $r_1 = 3$ og $r_2 = 2$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$1 = a_0 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 2^0 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (1)$$

$$0 = a_1 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 2^1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2. \quad (2)$$

Fra (1) får vi $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Setter dette inn i (2) og får $0 = 3\alpha_1 + 2(1 - \alpha_1) = \alpha_1 + 2$, altså $\alpha_1 = -2$. Fra (1) får vi $\alpha_2 = 3$. Løsningen blir derfor

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

- d) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad a_0 = 6, a_1 = 8.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$. Denne har en dobbel rot $r_0 = 2$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$a_0 = \alpha_1 = 6,$$

$$a_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 8.$$

Vi ser at $\alpha_1 = 6$ og $\alpha_2 = -2$, så løsningen er

$$a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n 2^n = (3 - n)2^{n+1}.$$

- e) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad a_0 = 0, a_1 = 4.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$. Denne har en dobbel rot $r_0 = -2$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1 (-2)^n + \alpha_2 n (-2)^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$a_0 = \alpha_1 = 0,$$

$$a_1 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 4.$$

Vi ser at $\alpha_1 = 0$ og $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, så løsningen er

$$a_n = -\frac{1}{2}n(-2)^n = n(-2)^{n-1}.$$

g) Vi ønsker å løse rekurrensligningen

$$a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - \frac{1}{4} = (r - \frac{1}{2})(r + \frac{1}{2}) = 0$. Røttene er $r_1 = \frac{1}{2}$ og $r_2 = -\frac{1}{2}$. Den generelle løsningen er da på formen $a_n = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved hjelp av initialbetingelsene

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ a_1 &= \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Vi løser systemet og får $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Løsningen blir derfor

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (1 + (-1)^n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

6 Ved å representere det første signalet (som bruker ett nanosekund) som blokken 1, det andre signalet (som bruker to nanosekunder) som blokken 22 og det siste signalet (som også bruker to nanosekunder) som blokken 33, så ser vi at antall beskjeder som kan sendes på n nanosekunder tilsvarer antall ulike strenger som kan lages ved å bruke blokkene 1, 22 og 33. La nå a_n være antallet slike strenger av lengde n .

Tilsvarende som i oppgave 8.1.11 så ser vi at a_n er summen av de strengene som slutter på 1, de som slutter på 22 og de som slutter på 33. Antallet av hver av disse strengene er henholdsvis a_{n-1} , a_{n-2} og a_{n-2} . Ergo har vi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ for $n \geq 3$. Videre har vi at $a_1 = 1$ (eneste streng er 1) og $a_2 = 3$ (mulige strenger er 11, 22 og 33).

Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0.$$

Røttene er $r_1 = 2$ og $r_2 = -1$, så løsningen er på formen $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$. Initialbetingelsene gir

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ a_2 &= 4\alpha_1 + \alpha_2 = 3. \end{aligned}$$

Ved å løse systemet over finner vi $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ og $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. Dermed er løsningen

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

- 11 a) Vi skal vise at $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ for alle $n \geq 2$, der f_n er det n 'te Fibonacci-tallet. Denne oppgaven løses enklest ved å bruke (sterk) induksjon.

Basissteg: Viser at det stemmer for $n = 2$ og $n = 3$.

$$L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = f_1 + f_3,$$

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = f_4 + f_2.$$

Induksjonshypotesen: La $n \geq 3$ og anta at påstanden holder for $k = 2, 3, \dots, n$, dvs. at $L_k = f_{k-1} + f_{k+1}$ når $k \leq n$.

Induksjonssteget: Vi må vise at påstanden holder for $k = n + 1$. Ved å bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} = (f_{k-1} + f_{k+1}) + (f_{k-2} + f_k) \\ &= (f_{k-1} + f_{k-2}) + (f_{k+1} + f_k) = f_k + f_{k+2}. \end{aligned}$$

Så påstanden holder for $k = n + 1$. Ved matematisk induksjon har vi nå vist at $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ for alle $n \geq 2$. \square

- b) Rekurrensligningen for Lukastallene har den karakteristiske ligningen $r^2 - r - 1 = 0$, som har røttene $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Løsningen er på formen

$$L_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

hvor α_1 og α_2 er konstanter. Vi finner disse ved å bruke initialbetingelsene

$$L_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

$$L_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Ved å løse ligningssystemet får vi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Dermed får følgende eksplisitte formel for Lukas-tallene:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

- 42 Vi skal vise at rekurrensligningen $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ med initialbetingelsene $a_0 = s$ og $a_1 = t$, der s og t er (kjente) konstanter, har løsningen $a_n = s f_{n-1} + t f_n$ for $n \geq 1$, der f_n er det n 'te Fibonacci-tallet. For å gjøre dette bruker vi (sterk) induksjon.

Basissteg: Viser at det stemmer for $n = 1$ og $n = 2$.

$$s \cdot f_0 + t \cdot f_1 = s \cdot 0 + t \cdot 1 = t = a_1,$$

$$s \cdot f_1 + t \cdot f_2 = s \cdot 1 + t \cdot 1 = s + t = a_0 + a_1 = a_2.$$

Induksjonshypotesen: La $n \geq 2$ og anta at påstanden holder for $k = 1, 2, \dots, n$, dvs. at $a_k = s f_{k-1} + t f_k$ når $k \leq n$.

Induksjonssteget: Vi må vise at påstanden holder for $k = n + 1$. Ved å bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = (s f_{n-1} + t f_n) + (s f_{n-2} + t f_{n-1}) \\ &= s(f_{n-1} + f_{n-2}) + t(f_n + f_{n-1}) = s f_n + t f_{n+1}. \end{aligned}$$

Så påstanden holder for $k = n + 1$. Ved matematisk induksjon har vi nå vist at $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ med initialbetingelsene $a_0 = s$ og $a_1 = t$ har løsningen $a_n = s f_{n-1} + t f_n$ for $n \geq 1$. \square

Seksjon 5.1

- 4 a) $P(1)$ er utsagnet $1^3 = (1 \cdot (1 + 1)/2)^2$.
 b) Begge sider i uttrykket over er lik 1.
 c) Induksjonshypotesen er utsagnet

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

- d) I induksjonssteget ønsker vi å bevise at for enhver $k \geq 1$ så er det slik at dersom $P(k)$ er sann, så impliserer det at $P(k+1)$ er sann. Vi ønsker altså å bevise at

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$$

når likheten i c) holder.

- e) Ved å bruke induksjonshypotesen i den første likheten nedenfor får vi

$$\begin{aligned} (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

- f) Vi har fullført både basissteget og det induksjonssteget, så ved prinsippet om matematisk induksjon følger det at utsagnet er sant for alle positive heltall n , altså holder formelen for alle n .

- 6 *Basissteg:* Når $n = 1$ har vi $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$.

Induktivt steg: Anta nå at $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$ for en $k \geq 1$ (induksjonshypotesen). Da er

$$\begin{aligned} (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k!) + (k+1) \cdot (k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! \\ &= (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$. □

- 14 I oppgaveteksten brukes k som summasjonsvariabel, så derfor bør vi bruke en annen variabel i induksjonssteget; for eksempel n .

Basissteg: For $n = 1$ har vi $\sum_{k=1}^1 k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 + 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$.

Induktivt steg: Anta nå at $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ for en $n \geq 1$ (induksjonshypotesen). Vi skal vise at

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = ((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} + 2.$$

Ved å splitte summen og bruke induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \left(\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k \right) + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2 = 2n \cdot 2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} + 2.\end{aligned}$$

Ved matematisk induksjon holder summasjonsformelen for alle $n \geq 1$.

□