Øvingsforelesning 8

TMA4140 Diskret Matematikk

22. og 24. oktober 2018

Induksjon, sterk induksjon og relasjoner, samt utvalgte oppgaver fra MP18

Dagen i dag

- Induksjon
- Sterk induksjon
- Relasjoner
- Oppgaver fra MP18

Forespørsel på mail

- Kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgaver fra temaene som gjennomgås i forelesningene i kommende uker.

Forespørsel på mail

- Kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgaver fra temaene som gjennomgås i forelesningene i kommende uker.
- Fint med tilbakemelding også: Går jeg for fort frem? For sakte? Mer eller mindre tid brukt på oppgaver? På repetisjon? Flere enkle eksempler? Færre? Send en mail!
- **Email:** mads.sandoy 'på' ntnu.no.

Induksjon I: Formulering

Prinsipp

PRINSIPPET OM MATEMATISK INDUKSJON: *For å vise at $P(n)$ er sann for alle positive heltall n, hvor $P(n)$ er en proposisjonsfunksjon, fullfører vi to steg:*
GRUNNSTEGET: *Vi sjekker at $P(1)$ er sann.*
INDUKSJONSSTEGET: *Vi viser at den kondisjonale påstanden $P(k) \rightarrow P(k+1)$ er sann for alle positive heltall k.*

Induksjon I: Formulering

Prinsipp

PRINSIPPET OM MATEMATISK INDUKSJON: *For å vise at $P(n)$ er sann for alle positive heltall n, hvor $P(n)$ er en proposisjonsfunksjon, fullfører vi to steg:*
GRUNNSTEGET: *Vi sjekker at $P(1)$ er sann.*
INDUKSJONSSTEGET: *Vi viser at den kondisjonale påstanden $P(k) \rightarrow P(k+1)$ er sann for alle positive heltall k.*

Husk: Induksjonssteget må fungere for **alle** $k \geq 1$!

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 1

- Intuitiv forklaring: dominoer

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 2

- De naturlige tallene er **velordnede**: gitt en mengde naturlige tall (= ikke-negative heltall) så har den mengden alltid et minste element.

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 2

- De naturlige tallene er **velordnede**: gitt en mengde naturlige tall (= ikke-negative heltall) så har den mengden alltid et minste element.
- Hvis induksjon ikke er gyldig, så gitt en proposisjonsfunksjon $P(n)$ finnes det en mengde av naturlige tall som ikke tilfredsstiller $P(n)$.
- Denne mengden har et minste element: m

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 2

- De naturlige tallene er **velordnede**: gitt en mengde naturlige tall (= ikke-negative heltall) så har den mengden alltid et minste element.
- Hvis induksjon ikke er gyldig, så gitt en proposisjonsfunksjon $P(n)$ finnes det en mengde av naturlige tall som ikke tilfredsstiller $P(n)$.
- Denne mengden har et minste element: m
- Men hva skjer da med $m - 1$?

Induksjon III: Eksempel

Vis at $n < 2^n$ for alle positive heltall.

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke
- Gir ingen forståelse

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke
- Gir ingen forståelse
- Krever ingen forståelse!

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke
- Gir ingen forståelse
- Krever ingen forståelse!
- Av og til finnes det mer effektive måter

Induksjon VI: K17.1

Vis at $n^2 - 7n + 12$ er større enn 0 når $n \geq 5$.

Induksjon VII: H12.3

Vis ved induksjon formelen

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$$

for $n \geq 2$.

Induksjon XIII: Sterk induksjon

- Veldig likt vanlig induksjon
- Man antar mer i induksjonssteget
- Logiskt ikke sterkere å anta enn vanlig induksjon

Induksjon IX: Sterk induksjon

Prinsipp

STERK INDUKSJON: *For å vise at $P(n)$ er sann for alle positive heltall n, hvor $P(n)$ er en proposisjonsfunksjon, fullfører vi to steg:*
GRUNNSTEGET: *Vi sjekker at $P(1)$ er sann.*
INDUKSJONSSTEGET: *Vi viser at den kondisjonale påstanden $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ er sann for alle positive heltall k.*

Induksjon X: Sterk induksjon, oppgave 5.2.6

a) Determine which amounts of postage can be formed using just 3-cent and 10-cent stamps.

b) Prove your answer to a) using the principle of mathematical induction.

c) Prove your answer to a) using the principle of strong induction.

Induksjon XI: Sterk induksjon

- Sterk induksjon er ekvivalent med vanlig induksjon

Induksjon XI: Sterk induksjon

- Sterk induksjon er ekvivalent med vanlig induksjon
- Vanlig og sterk induksjon er begge ekvivalent med velordningen av heltallene

Induksjon XI: Sterk induksjon

- Sterk induksjon er ekvivalent med vanlig induksjon
- Vanlig og sterk induksjon er begge ekvivalent med velordningen av heltallene
- Ene veien er enkel å se

Relasjoner I: Definisjon

Definisjon

La A og B være mengder. En *binær relasjon fra* A *til* B er en undermengde av $A \times B$.

Relasjoner I: Definisjon

Definisjon

La A og B være mengder. En *binær relasjon fra* A *til* B er en undermengde av $A \times B$.

Definisjon

En *relasjon på en mengde* A er en relasjon fra A til A.

Relasjoner IIa: Eksempel med endelige mengder

Eksempel: Undermengder av $\{a, b, c\} \times \{1, 2, 3\}$.

Relasjoner IIb: Abstrakte eksempler

Eksempel:

- Funksjoner fra A til B

Relasjoner IIb: Abstrakte eksempler

Eksempel:

- Funksjoner fra A til B
- Tallsystemer og likhet

Relasjoner IIb: Abstrakte eksempler

Eksempel:

- Funksjoner fra A til B
- Tallsystemer og likhet
- $\mathbb{R}$ og ulikheter

Egenskaper ved relasjoner I

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for ethvert element $a \in A$.

Egenskaper ved relasjoner I

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for ethvert element $a \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.

Egenskaper ved relasjoner I

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for ethvert element $a \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.

Egenskaper ved relasjoner I

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for ethvert element $a \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.

Egenskaper ved relasjoner I

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for ethvert element $a \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.
- $\mathbb{Z}^+$ og delbarhet, altså $|$.

Egenskaper ved relasjoner II

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *symmetrisk* hvis $(b, a) \in R$ hvis $(a, b) \in R$, for alle $a, b \in A$. En relasjon på en mengde A slik at for alle $a, b \in A$ man har at $(a, b) \in R$ og $(b, a) \in R$ gir at $a = b$ kalles antisymmetrisk.

Egenskaper ved relasjoner II

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *symmetrisk* hvis $(b, a) \in R$ hvis $(a, b) \in R$, for alle $a, b \in A$. En relasjon på en mengde A slik at for alle $a, b \in A$ man har at $(a, b) \in R$ og $(b, a) \in R$ gir at $a = b$ kalles antisymmetrisk.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.
- $\mathbb{Z}^+$ og delbarhet, altså $|$.

Egenskaper ved relasjoner III

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *transitiv* hvis man har at $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ gir at $(a, c) \in R$ for alle $a, b, c \in A$.

Egenskaper ved relasjoner III

Definisjon

En relasjon R på en mengde A kalles *transitiv* hvis man har at $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ gir at $(a, c) \in R$ for alle $a, b, c \in A$.

Eksempler:

- $\mathbb{R}$ og likhet, altså $=$.
- $\mathbb{R}$ og ulikhet, altså $\leq$.
- $\mathbb{Z}$ og kongruens modulo m, altså $\equiv$.
- $\mathbb{Z}^+$ og delbarhet, altså $|$.

Eksamen 2013, oppgave 8.4

La R være relasjonen på $\mathbb{Z}$ definert ved at $(x, y) \in R$ dersom $3 \mid (x + 2y)$, dvs. 3 er en divisor til $(x + 2y)$. Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) R er refleksiv.

Alt 2) R er antisymmetrisk.

Alt 3) R er symmetrisk.

Alt 4) R er transitiv.

MP18 og annet

- Vi ser på midtsemesterprøven fra i år i den gjenværende tiden.
- Husk at dere kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgaver/temaer på mail!
- Og tilbakemelding!

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er injektiv siden den er strengt voksende på domenet.

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

d) $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gitt ved $g(x) = x^2$ er surjektiv siden hvert ikke-negativt reelt tall har en reell kvadratrot.

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- $f(x) = 5x^2$ er $O(x^3)$

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- $f(x) = 5x^2$ er $O(x^3)$
- x^n er $O(x^m)$ hvis $n \leq m$ men ikke omvendt!
- Konkret eksempel: x er $O(x^2)$

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$
- Hvis $f(x)$ er $(\Omega(g(x))$, hva annet kan vi si om f og g?

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$
- Hvis $f(x)$ er $(\Omega(g(x))$, hva annet kan vi si om f og g?
- $g(x)$ er $O(f(x))$!

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!
- $x^2 + 2x + 1$ er $\Theta(x^2)$

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!
- $x^2 + 2x + 1$ er $\Theta(x^2)$

Grensemetoden

La $f, g\colon \mathbb{R}/\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ være funksjoner.

1. $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0 \implies f(x)$ er $O(g(x))$, og $g(x)$ er *ikke* $O(f(x))$.
2. $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty \implies g(x)$ er $O(f(x))$, og $f(x)$ er *ikke* $O(g(x))$.
3. $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = L$, der $0 < L < \infty \implies f(x)$ er $\Theta(g(x))$.

Teoremer

Teorem (2)

Hvis f_1 *er* $O(g_1)$, f_2 *er* $O(g_2)$ *og* g_1 *er* $O(g_2)$, *så er* $f_1 + f_2$ $O(g_2)$.

Teorem (3)

Hvis f_1 *er* $O(g_1)$ *og* f_2 *er* $O(g_2)$, *så er* $f_1 f_2$ $O(g_1 g_2)$.

Teorem (4)

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ *er* $\Theta(x^k)$, *og*
$\log_b(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k)$ *er* $\Theta(\log(x))$.

Liste av funksjoner

- **Viktige funksjoner**: $1, \log n, n, n \log n, n^2, n^3, \cdots, 2^n, n!$
  (Også: side 271.)
- **Merk:** Disse er sortert etter vekstrate/orden.

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Eksempler:

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Eksempler:

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- $a_n = 2a_{n-1} - 9a_{n-2}$

Rekurrensrelasjoner II

- Til en rekurrensrelasjon $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ kan vi assossiere en karakteristisk ligning: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Rekurrensrelasjoner II

- Til en rekurrensrelasjon $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ kan vi assossiere en karakteristisk ligning: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.
- Ideen er at vi leter etter løsninger på formen $a_n = r^n$.

Rekurrensrelasjoner III

Theorem

La c_1 og c_2 være relle tall. Anta at $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ har to distinkte røtter r_1 og r_2. Da er følgen $\{a_n\}$ en løsning av rekurrensrelasjonen $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ hvis og bare hvis $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha r_2^n$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$, hvor α_1 og α_2 er konstanter.