Øvingsforelesning 7

TMA4140 Diskret Matematikk

15. og 17. oktober 2018

Resten av kombinatorikk, litt modulusregning, rekurrenser og induksjon og MP13 eller MP18

Dagen i dag

- Generaliserte permutasjoner og kombinasjoner
- Å generere permutasjoner
- Algoritment for modulær eksponentiering
- Rekurrensrelasjoner
- Induksjon
- Alt etter hva dere foretrekker: oppgaver fra MP13 eller MP18

Forespørsel på mail

- Kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgaver fra årets MP neste gang.

Forespørsel på mail

- Kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgaver fra årets MP neste gang.
- Fint med tilbakemelding også: Går jeg for fort frem? For sakte? Mer eller mindre tid brukt på oppgaver? På repetisjon? Flere enkle eksempler? Færre? Send en mail!
- **Email:** mads.sandoy 'på' ntnu.no.

Generaliserte kombinasjoner I

Hvordan teller man hvor mange måter man kan plassere n ikke-distingverbare elementer i r distingverbare bokser? $C(r+n-1, n)$! (**Merk:** Her var det en trykkfeil på mandagsforelesningen i forrige uke.)

4a): På hvor mange måter kan man fordele 6 eksemplarer av samme lærebok til de tre studentene Lise, Per og Anne, der en student kan motta flere eksemplarer? Forklar din fremgangsmåte.

Generaliserte kombinasjoner II

En bokhylle inneholder 12 bøker som står i rekkefølge. På hvor mange måter kan man plukke ut 5 bøker slik at man ikke plukker bøker som står ved siden av hverandre?
(Hint: Representer bøkene som plukkes ut ved stolper $|$, og bøkene som ikke blir plukket ut ved $*$.)

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Vi bruker leksikografisk ordning av permutasjoner: $a_1 a_2 \cdots a_n$ forekommer før $b_1 b_2 \cdots b_n$ hvis det finnes en $1 \leq k \leq n$ slik at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$ og $a_k < b_k$.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Vi bruker leksikografisk ordning av permutasjoner: $a_1 a_2 \cdots a_n$ forekommer før $b_1 b_2 \cdots b_n$ hvis det finnes en $1 \leq k \leq n$ slik at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$ og $a_k < b_k$.
- Dette er også kjent som en "dictionary ordering".

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Vi bruker leksikografisk ordning av permutasjoner: $a_1 a_2 \cdots a_n$ forekommer før $b_1 b_2 \cdots b_n$ hvis det finnes en $1 \leq k \leq n$ slik at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$ og $a_k < b_k$.
- Dette er også kjent som en "dictionary ordering".
- 23415 forekommer før 23514.

Å generere permutasjoner II

Eksempler:

- Alle permutasjonene på $\{1, 2, 3\}$.

Å generere permutasjoner II

Eksempler:

- Alle permutasjonene på $\{1, 2, 3\}$.
- **6.6 Oppgave 5c):** Finn den neste permutasjonen etter 12453.

Algoritmen for modulær eksponentiering

- Ideen er å bruke binær representasjonen av eksponenten til å regne ut a^b modulo p.

Algoritmen for modulær eksponentiering

- Ideen er å bruke binær representasjonen av eksponenten til å regne ut a^b modulo p.
- Denne finner man forklart på side 253.

Algoritmen for modulær eksponentiering

- Ideen er å bruke binær representasjonen av eksponenten til å regne ut a^b modulo p.
- Denne finner man forklart på side 253.
- Men det er enklere å se den i et eksempel.

Algoritmen for modulær eksponentiering

- Ideen er å bruke binær representasjonen av eksponenten til å regne ut a^b modulo p.
- Denne finner man forklart på side 253.
- Men det er enklere å se den i et eksempel.
- Bruk algoritmen for modulær eksponentiering til å regne ut 5^{25} modulo 7.

Algoritmen for modulær eksponentiering

- Ideen er å bruke binær representasjonen av eksponenten til å regne ut a^b modulo p.
- Denne finner man forklart på side 253.
- Men det er enklere å se den i et eksempel.
- Bruk algoritmen for modulær eksponentiering til å regne ut 5^{25} modulo 7.
- Bruk algoritmen for modulær eksponentiering til å regne ut 3^{644} modulo 645.

Algoritmen for modulær eksponentiering

- Ideen er å bruke binær representasjonen av eksponenten til å regne ut a^b modulo p.
- Denne finner man forklart på side 253.
- Men det er enklere å se den i et eksempel.
- Bruk algoritmen for modulær eksponentiering til å regne ut 5^{25} modulo 7.
- Bruk algoritmen for modulær eksponentiering til å regne ut 3^{644} modulo 645.
- Bruk algoritmen for modulær eksponentiering til å regne ut 3185^{2753} modulo 3233.

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Eksempler:

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Rekurrensrelasjoner I

Definisjon

En lineær homogen rekurrensrelasjon av grad k med konstante koeffisienter er en rekurrensrelasjon av formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er reelle tall, og $c_k \neq 0$.

Eksempler:

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- $a_n = 2a_{n-1} - 9a_{n-2}$

Rekurrensrelasjoner II

- Til en rekurrensrelasjon $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ kan vi assossiere en karakteristisk ligning: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

Rekurrensrelasjoner II

- Til en rekurrensrelasjon $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ kan vi assossiere en karakteristisk ligning: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.
- Ideen er at vi leter etter løsninger på formen $a_n = r^n$.

Rekurrensrelasjoner III

Theorem

La c_1 *og* c_2 *være relle tall. Anta at* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *har to distinkte røtter* r_1 *og* r_2*. Da er følgen* $\{a_n\}$ *en løsning av rekurrensrelasjonen* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *hvis og bare hvis* $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha r_2^n$ *for* $n = 0, 1, 2, \ldots$*, hvor* α_1 *og* α_2 *er konstanter.*

Rekurrensrelasjoner III: Eksempel

Hva er løsningen av rekurrensrelasjonen

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

med $a_0 = 2$ og $a_1 = 7$?

Rekurrensrelasjoner IV

Theorem

La c_1 *og* $c_2 \neq 0$ *være relle tall. Anta at* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *har kun en rot* r_0*. Da er følgen* $\{a_n\}$ *en løsning av rekurrensrelasjonen* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *hvis og bare hvis* $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha n r_0^n$ *for* $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *hvor* α_1 *og* α_2 *er konstanter.*

Rekurrensrelasjoner V: MP15.13

Gitt rekurrensrelasjonen $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$; $n \geq 2$ med initialbetingelsene $a_0 = -2$, $a_1 = 21$. Hva er a_{10}?

Alt 1) -1936973136

Alt 2) 1936973136

Alt 3) 13558811952

Alt 4) -13558811952

Induksjon I: Formulering

Prinsipp

PRINSIPPET OM MATEMATISK INDUKSJON: *For å vise at $P(n)$ er sant for alle positive heltall n, hvor $P(n)$ er en proposisjonsfunksjon, fullfører vi to steg:*
GRUNNSTEGET: *Vi sjekker at $P(1)$ er sant.*
INDUKSJONSSTEGET: *Vi viser at den kondisjonale påstanden $P(k) \to P(k+1)$ er sann for alle positive heltall k.*

Induksjon I: Formulering

Prinsipp

PRINSIPPET OM MATEMATISK INDUKSJON: *For å vise at $P(n)$ er sant for alle positive heltall n, hvor $P(n)$ er en proposisjonsfunksjon, fullfører vi to steg:*
GRUNNSTEGET: *Vi sjekker at $P(1)$ er sant.*
INDUKSJONSSTEGET: *Vi viser at den kondisjonale påstanden $P(k) \to P(k+1)$ er sann for alle positive heltall k.*

Husk: Induksjonssteget må fungere for alle n!

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 1

- Intuitiv forklaring: dominoer

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 2

- De naturlige tallene er **velordnede**: gitt en mengde naturlige tall (= ikke-negative heltall) så har den mengden alltid et minste element.

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 2

- De naturlige tallene er **velordnede**: gitt en mengde naturlige tall (= ikke-negative heltall) så har den mengden alltid et minste element.
- Hvis induksjon ikke er gyldig, så gitt en proposisjonsfunksjon $P(n)$ finnes det en mengde av naturlige tall som ikke tilfredsstiller $P(n)$.
- Denne mengden har et minste element: m

Induksjon II: Hvorfor er dette gyldig? 2

- De naturlige tallene er **velordnede**: gitt en mengde naturlige tall (= ikke-negative heltall) så har den mengden alltid et minste element.
- Hvis induksjon ikke er gyldig, så gitt en proposisjonsfunksjon $P(n)$ finnes det en mengde av naturlige tall som ikke tilfredsstiller $P(n)$.
- Denne mengden har et minste element: m
- Men hva skjer da med $m - 1$?

Induksjon III: Eksempel

Vis at $n < 2^n$ for alle positive heltall.

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke
- Gir ingen forståelse

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke
- Gir ingen forståelse
- Krever ingen forståelse!

Induksjon IV: Fordeler og ulemper med matematisk induksjon

- (Relativt) effektivt og (relativt) enkelt å bruke
- Gir ingen forståelse
- Krever ingen forståelse!
- Av og til finnes det mer effektive måter

Induksjon V: Eksempel

Bruk matematisk induksjon til å vise at $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ er delelig på 57 for $n \geq 0$.

Husk: Grunnsteg og induksjonssteg!

Induksjon VI: K17.1

Vis at $n^2 - 7n + 12$ er større enn 0 når $n \geq 5$.

Induksjon VII: H12.3

Vis ved induksjon formelen

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

for $n \geq 2$.

MP13 og annet

- Vi ser på midtsemesterprøven fra 2013 i den gjenværende tiden.
- Alternativt kan vi se på oppgaver fra årets midtsemesterprøve (men her er jeg mindre forberedt!)
- Husk at dere kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgaver/temaer på mail!
- Og tilbakemelding!

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er injektiv siden den er strengt voksende på domenet.

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

d) $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gitt ved $g(x) = x^2$ er surjektiv siden hvert ikke-negativt reelt tall har en reell kvadratrot.

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- $f(x) = 5x^2$ er $O(x^3)$

Store O

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis det finnes konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

når $x > k$.

Eksempler:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- $f(x) = 5x^2$ er $O(x^3)$
- x^n er $O(x^m)$ hvis $n \leq m$ men ikke omvendt!
- Konkret eksempel: x er $O(x^2)$

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$
- Hvis $f(x)$ er $(\Omega(g(x))$, hva annet kan vi si om f og g?

Store Omega

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis det finnes **positive** konstanter C og k slik at

$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$

når $x > k$.

- **Eksempel:** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $\Omega(x^2)$
- Hvis $f(x)$ er $(\Omega(g(x))$, hva annet kan vi si om f og g?
- $g(x)$ er $O(f(x))$!

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!
- $x^2 + 2x + 1$ er $\Theta(x^2)$

Store Theta

Definisjon

La f og g være funksjoner fra heltallene eller de reelle tallene til mengden av reelle tall. Vi sier at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$. Vi sier at $f(x)$ er av orden $g(x)$ og at f og g er av samme orden.

- Hvis $f(x)$ er $\Theta(g(x))$, hva annet kan vi si om de?
- $g(x)$ er $\Theta(f(x))$!
- $x^2 + 2x + 1$ er $\Theta(x^2)$

Grensemetoden

La $f, g \colon \mathbb{R}/\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ være funksjoner.

1. $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0 \implies f(x)$ er $O(g(x))$, og $g(x)$ er *ikke* $O(f(x))$.
2. $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty \implies g(x)$ er $O(f(x))$, og $f(x)$ er *ikke* $O(g(x))$.
3. $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = L$, der $0 < L < \infty \implies f(x)$ er $\Theta(g(x))$.

Teoremer

Teorem (2)

Hvis f_1 *er* $O(g_1)$*,* f_2 *er* $O(g_2)$ *og* g_1 *er* $O(g_2)$*, så er* $f_1 + f_2$ $O(g_2)$*.*

Teorem (3)

Hvis f_1 *er* $O(g_1)$ *og* f_2 *er* $O(g_2)$*, så er* $f_1 f_2$ $O(g_1 g_2)$*.*

Teorem (4)

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ *er* $\Theta(x^k)$*, og*
$\log_b(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k)$ *er* $\Theta(\log(x))$*.*

Liste av funksjoner

- **Viktige funksjoner**: $1, \log n, n, n \log n, n^2, n^3, \cdots, 2^n, n!$ (Også: side 271.)
- **Merk:** Disse er sortert etter vekstrate/orden.