Øvingsforelesning 6

TMA4140 Diskret Matematikk

08. og 10. oktober 2018

Kombinatorikk, generaliserte permutasjoner, og MP13

Dagen i dag

- Per forespørsmål, **MP15.4**
- Trediagram
- Produktssetningen
- Permutasjoner
- Binomialsetningen
- Generaliserte permutasjoner og kombinasjoner
- Å generere permutasjoner
- Midtsemesterprøven 2013

Forespørsel på mail

- Kan sende forespørsel om MP oppgaver å gjennomgå neste gang.

Forespørsel på mail

- Kan sende forespørsel om MP oppgaver å gjennomgå neste gang.
- Fint med tilbakemelding også: Går jeg for fort frem? For sakte? Mer eller mindre tid brukt på oppgaver? På repetisjon? Flere enkle eksempler? Færre? Send en mail!
- **Email:** mads.sandoy 'på' ntnu.no.

MP15.4

La universalmengden være de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\exists m \forall n ((m+3) | ((n+2)^{m+2} - 1)$

Alt 2) $\forall k \forall m \exists n ((k < n) \rightarrow (k \geq m)$

Alt 3) $\exists k \forall m ((k+2) | (m+2)^{k+1})$

Alt 4) $\exists n \forall m ((n+8) | ((m+1)^{n+8} - m - 1))$

Trediagram

- Vi kan bruke trediagram til å telle. Trær består av en rot, grener, og eventuelt flere grener som forlater endepunktene av andre grener. **Prinsipp**: En gren for hvert valg.

MS12.5: Trediagram, eller add.setning og utvalg, eller annet

La $f\colon \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$. Hvor mange surjektive funksjoner f finnes det?

Alt 1) 9

Alt 2) 12

Alt 3) 6

Alt 4) 8

Produktsetningen

Prinsipp

Anta at en prosedyre kan brytes ned i en sekvens av to handlinger. Hvis det er n_1 måter å gjøre den første handlingen og n_2 måter å gjøre den andre handlingen, så er det $n_1 \cdot n_2$ måter å gjøre handlingen på.

Produktsetningen

Prinsipp

Anta at en prosedyre kan brytes ned i en sekvens av to handlinger. Hvis det er n_1 måter å gjøre den første handlingen og n_2 måter å gjøre den andre handlingen, så er det $n_1 \cdot n_2$ måter å gjennomføre hele handlingen.

Eksempler:

- En pinkode til et bankkort består av fire siffer. Gitt at det er ti forskjellige siffer, blir det 10^4 forskjellige mulige pinkoder.

Produktsetningen

Prinsipp

Anta at en prosedyre kan brytes ned i en sekvens av to handlinger. Hvis det er n_1 måter å gjøre den første handlingen og n_2 måter å gjøre den andre handlingen, så er det $n_1 \cdot n_2$ måter å gjennomføre hele handlingen.

Eksempler:

- En pinkode til et bankkort består av fire siffer. Gitt at det er ti forskjellige siffer, blir det 10^4 forskjellige mulige pinkoder.
- Hvis det er 7 forskjellige burgere, 2 forskjellig typer fries og 2 forskjellige måter å oppgradere fries på, så er det $7 \cdot (2 \cdot 3) = 42$ forskjellige mulige menyer bestående av burgere og fries med og uten oppgradering.

MS15.12: Utvalg og produktsetningen

En gruppe på 8 menn og 5 kvinner skal fordeles på en komite bestående av 6 personer. Hvor mange komiteer kan man danne som har 4 menn og 2 kvinner?

Alt 1) 280

Alt 2) 1716

Alt 3) 700

Alt 4) 225

MS14.6

Betrakt funksjoner $f\colon X \to Y$, der $X = \{a, b, c\}$ og $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) Det er 216 forskjellige funksjoner f.

Alt 2) Det er 120 injektive funksjoner f.

Alt 3) Det er 3^6 forskjellige funksjoner f.

Alt 4) Det er $\binom{6}{3}$ injektive funksjoner f.

Hanske-skuffe-prinsippet

Theorem

Hvis k *er et positivt heltall og* $k+1$ *eller flere objekter blir plassert i* k *esker, så må det være minst en eske som inneholder to eller flere av objektene.*

Merk:På engelsk er dette "the Pigeonhole Principle".

Hanske-skuffe-prinsippet

(**Merk:** På engelsk er dette ”the Pigeonhole Principle”.)

Theorem

Hvis k er et positivt heltall og $k + 1$ eller flere objekter blir plassert i k esker, så må det være minst en eske som inneholder to eller flere av objektene.

Eksempler:

- I enhver gruppe av 367 mennesker finnes det minst to som har samme bursdag siden det er kun 366 mulige fødselsdager.

Hanske-skuffe-prinsippet

(**Merk:** På engelsk er dette "the Pigeonhole Principle".)

Theorem

Hvis k er et positivt heltall og $k+1$ eller flere objekter blir plassert i k esker, så må det være minst en eske som inneholder to eller flere av objektene.

Eksempler:

- I enhver gruppe av 367 mennesker finnes det minst to som har samme bursdag siden det er kun 366 mulige fødselsdager.
- En funksjon $f : X \to Y$ med $|Y| = k < |X| < \infty$ kan ikke være injektiv.

Hanske-skuffe-prinsippet

(**Merk:** På engelsk er dette "the Pigeonhole Principle".)

Theorem

Hvis k er et positivt heltall og $k+1$ eller flere objekter blir plassert i k esker, så må det være minst en eske som inneholder to eller flere av objektene.

Eksempler:

- I enhver gruppe av 367 mennesker finnes det minst to som har samme bursdag siden det er kun 366 mulige fødselsdager.
- En funksjon $f : X \to Y$ med $|Y| = k < |X| < \infty$ kan ikke være injektiv.
- Hvor mange tall må velges fra mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ for å garantere at det minst et par av tallene som adderer opp til 7?

6.3: Oppgave 5

Vis at i en gruppe av 5 vilkårlige heltall (ikke nødvendigvis påfølgende) så er det to med samme rest ved deling på 4.

MS14.12

La A være en delmengde av $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. Hvilke av følgende verdier av $|A|$ ($=$ antall elementer i A) garanterer at minst et par av (distinkte) tall i A adderer til et tall større enn 20?

Alt 1) 6

Alt 2) 4

Alt 3) 7

Alt 4) 5

Permutasjoner I

- Med en permutasjon av en mengde **distinkte** elementer, mener vi en bestemt måte å sette elementene i en (**ordnet**) rekkefølge.

Permutasjoner I

- Med en permutasjon av en mengde **distinkte** elementer, mener vi en bestemt måte å sette elementene i en (**ordnet**) rekkefølge.
- En er også interessert i ordnede rekkefølger undermengder av en gitt mengde, og snakker derfor om r-permutasjoner.

Permutasjoner I

- Med en permutasjon av en mengde **distinkte** elementer, mener vi en bestemt måte å sette elementene i en (**ordnet**) rekkefølge.
- En er også interessert i ordnede rekkefølger undermengder av en gitt mengde, og snakker derfor om r-permutasjoner.
- **Eksempel 1:** La $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Da er $1, 2, 3, 4$ og $2, 3, 4, 1$ to forskjellige permutasjoner av S. Disse er forskjellige.

Permutasjoner I

- Med en permutasjon av en mengde **distinkte** elementer, mener vi en bestemt måte å sette elementene i en (**ordnet**) rekkefølge.
- En er også interessert i ordnede rekkefølger undermengder av en gitt mengde, og snakker derfor om r-permutasjoner.
- **Eksempel 1:** La $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Da er $1, 2, 3, 4$ og $2, 3, 4, 1$ to forskjellige permutasjoner av S. Disse er forskjellige.
- **Eksempel 2:** La S være som i forrige. $2, 3, 4$ er da en 3-permutasjon av S. $1, 4$ er en 2-permutasjon av S.

Permutasjoner II

Theorem

Hvis n er et positivt heltall og r er et heltall med $1 \leq r \leq n$, så er det

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)$$

forskjellige r-permutasjoner av en mengde med n distinkte elementer.

Permutasjoner II

Theorem

Hvis n er et positivt heltall og r er et heltall med $1 \leq r \leq n$, så er det

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)$$

forskjellige r-permutasjoner av en mengde med n distinkte elementer.

Eksempler:

- Det er $3 \cdot 2 = 6$ forskjellige 2-permutasjoner av $\{1, 2, 3\}$.

MS15.5

Hvor mange forskjellige strenger kan dannes av bokstavene i AARDVARV dersom de tre A'ene skal forekomme i rekkefølge etter hverandre?

Alt 1) 1680

Alt 2) 180

Alt 3) 720

Alt 4) 360

Binomialsetningen I

Vi skriver $\binom{n}{r}$ for antallet r-kombinasjoner av en n elements mengde. Man kaller uttrykk slik som $\binom{n}{r}$ for binomialkoeffisienter.

Eksempel: Hva er koeffisientene til leddene i utvidelsen til $(x+y)^3$ er $\binom{3}{2}$?.

Binomialsetningen II

Ideen i dette eksempelet kan brukes til å vise at

Theorem

La x og y være variabler, og la n være et ikke-negativt heltall. Da er

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j.$$

Generaliserte permutasjoner

Vi har sett på permutasjoner uten repetisjon. Permutasjoner med repetisjon er ikke spesielt mye vanskeligere.

Eksempler:

- Hvor mange bitstrenger av lengde 7 finnes det? 2^7!

Generaliserte permutasjoner

Vi har sett på permutasjoner uten repetisjon. Permutasjoner med repetisjon er ikke spesielt mye vanskeligere.

Eksempler:

- Hvor mange bitstrenger av lengde 7 finnes det? 2^7!
- Hvor mange strenger av lengde 5 av store bokstaver finnes det? Med norskt alfabet, er det 5^{29} slike strenger.

Generaliserte kombinasjoner I

Permutasjoner med repetisjon var greit. Kombinasjoner med repetisjon er noe verre.

Eksempler:

- På hvor mange måter kan vi velge 2 elementer fra en mengde av 3 med repetisjon?

Generaliserte kombinasjoner I

Permutasjoner med repetisjon var greit. Kombinasjoner med repetisjon er noe verre.

Eksempler:

- På hvor mange måter kan vi velge 2 elementer fra en mengde av 3 med repetisjon?
- På hvor mange måter kan vi velge 3 elementer fra en mengde av 2 med repetisjon?

Generaliserte kombinasjoner II

Ved å bruke stjerner og streker (''stars and bars'') har vi sett at

Theorem

Det er $C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r} = C(n+r-1, n-1)$ r-kombinasjoner fra en mengde av n elementer med repetisjon.

Generaliserte kombinasjoner III: Eksempel 1

Anta at en falafelforretning har fire forskjellige typer falafler. På hvor mange måter kan man velge seks falafler?

Generaliserte kombinasjoner IV: Eksempel 2

Hvor mange løsninger har likningen $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ hvor x_1, x_2 og x_3 er ikke-negative heltall?

Generaliserte kombinasjoner V: MP15.7

Hvor mange heltalls løsninger finnes det til ligningen
$x_1 + x_2 + x_3 = 13$ når $x_1 \geq -2, x_2 \geq 5, x_3 \geq 3$?

Alt 1) 36

Alt 2) 18

Alt 3) 171

Alt 4) 969

Generaliserte kombinasjoner VI H15.4a

Hvordan teller man hvor mange måter man kan plassere n ikke-distingverbare elementer i r distingverbare bokser? $C(r+n-1, n)$! (**Merk:** Her var det en trykkfeil på mandagsforelesningen.)

4a): På hvor mange måter kan man fordele 6 eksemplarer av samme lærebok til de tre studentene Lise, Per og Anne, der en student kan motta flere eksemplarer? Forklar din fremgangsmåte.

Generaliserte kombinasjoner VII H15.4b

4b): Man har 20 identiske kort som skal puttes i 12 distinkte konvolutter. På hvor mange måter kan dette gjøres dersom hver konvolutt skal inneholde minst ett kort? Forklar din fremgangsmåte.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Vi bruker leksikografisk ordning av permutasjoner: $a_1 a_2 \cdots a_n$ forekommer før $b_1 b_2 \cdots b_n$ hvis det finnes en $1 \leq k \leq n$ slik at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$ og $a_k < b_k$.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Vi bruker leksikografisk ordning av permutasjoner: $a_1 a_2 \cdots a_n$ forekommer før $b_1 b_2 \cdots b_n$ hvis det finnes en $1 \leq k \leq n$ slik at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$ og $a_k < b_k$.
- Dette er også kjent som en ”dictionary ordering”.

Å generere permutasjoner I

- Av og til ønsker man å kunne skrive ned alle permutasjonene av en mengde.
- Vi kan sette alle n-elements mengder i en-til-en samsvar med $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Vi bruker leksikografisk ordning av permutasjoner: $a_1 a_2 \cdots a_n$ forekommer før $b_1 b_2 \cdots b_n$ hvis det finnes en $1 \leq k \leq n$ slik at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$ og $a_k < b_k$.
- Dette er også kjent som en "dictionary ordering".
- 23415 er forekommer før 23514.

Å generere permutasjoner II

Eksempler:

- Alle permutasjonene på $\{1, 2, 3\}$.

Å generere permutasjoner II

Eksempler:

- Alle permutasjonene på $\{1, 2, 3\}$.
- **6.6 Oppgave 5c):** Finn den neste permutasjonen etter 12453.

MP13 og annet

- Vi ser på midtsemesterprøven fra 2013 i den gjenværende tiden.
- Husk at dere kan sende forespørsel om å gjennomgå oppgave på mail!
- Og tilbakemelding!