Øvingsforelesning 2

TMA4140 Diskret Matematikk

10. og 12. september 2018

Mengdelære, funksjoner, rekurrenser, osv.

Dagens øvingsforelesning

- Spørsmål til emnene i forrige uke
- Oppgaver fra midtsemesterprøver
- Oppgaver lik de fra første øving
- Repetisjon underveis

Mengdelære repetisjon

Definisjon

En mengde er en samling objekter.

Eksempler: $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$, $A := \{a, b, c\}$, og $B := \{c, d, e\}$.

a) To måter å beskrive mengder på

Mengdelære repetisjon

Definisjon

En mengde er en samling objekter.

Eksempler: $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$, $A := \{a, b, c\}$, og $B := \{c, d, e\}$.

a) To måter å beskrive mengder på

b) Når er to mengder like?

Mengdelære repetisjon

Definisjon

En mengde er en samling objekter.

Eksempler: $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$, $A := \{a, b, c\}$, og $B := \{c, d, e\}$.

a) To måter å beskrive mengder på
b) Når er to mengder like?
c) Definisjon av mengdeteoretiske operasjoner: union, snitt, komplement, mengdeteoretisk differanse

Mengdelære repetisjon

Definisjon

En mengde er en samling objekter.

Eksempler: $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e\}$, $A := \{a, b, c\}$, og $B := \{c, d, e\}$.

a) To måter å beskrive mengder på
b) Når er to mengder like?
c) Definisjon av mengdeteoretiske operasjoner: union, snitt, komplement, mengdeteoretisk differanse
d) Definisjon av ordnede par, n-tupler osv.

Kraftmengde/powerset

Definisjon

Gitt en mengde S, så er *kraftmengden* av S mengden av alle undermengder av mengden S. Kraftmengden til S denoteres med $\mathcal{P}(S)$.

Delkapittel 2.1, Oppgave 23: How many elements does each of these sets have where a and b are distinct elements?

a) $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$

Kraftmengde/powerset

Definisjon

Gitt en mengde S, så er *kraftmengden* av S mengden av alle undermengder av mengden S. Kraftmengden til S denoteres med $\mathcal{P}(S)$.

Delkapittel 2.1, Oppgave 23: How many elements does each of these sets have where a and b are distinct elements?

a) $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$

b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$

Kraftmengde/powerset

Definisjon

Gitt en mengde S, så er *kraftmengden* av S mengden av alle undermengder av mengden S. Kraftmengden til S denoteres med $\mathcal{P}(S)$.

Delkapittel 2.1, Oppgave 23: How many elements does each of these sets have where a and b are distinct elements?

a) $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$

b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$

c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

Midtsemester 17, Oppgave 13

La A, B, C, D være ikke-tomme delmengder av mengden X. Hvilke av følgende mengdeteoretiske identiteter er riktige?

Alt 1) $A \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = A \cap B$ •

Midtsemester 17, Oppgave 13

La A, B, C, D være ikke-tomme delmengder av mengden X. Hvilke av følgende mengdeteoretiske identiteter er riktige?

Alt 1) $A \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = A \cap B$ $\bullet$

Alt 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ $\bullet$

Midtsemester 17, Oppgave 13

La A, B, C, D være ikke-tomme delmengder av mengden X. Hvilke av følgende mengdeteoretiske identiteter er riktige?

Alt 1) $A \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = A \cap B$ $\bullet$

Alt 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ $\bullet$

Alt 3) $D - (A - B) = (D - A) - B$

Midtsemester 17, Oppgave 13

La A, B, C, D være ikke-tomme delmengder av mengden X. Hvilke av følgende mengdeteoretiske identiteter er riktige?

Alt 1) $A \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = A \cap B$ •

Alt 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ •

Alt 3) $D - (A - B) = (D - A) - B$

Alt 4) Dersom $D \cup A = B \cup A$ og $D \cap A \subset B \cap A$, så er $D = B$.

Husk: DeMorgans identiteter for mengder! $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, og omvendt.

Delkapittel 2.2, Oppgave 18

Husk: Hvordan viser vi at for gitte mengder A, B så har vi at $A \subseteq B$? Man viser at alle elementer i A også er inneholdt i B. Eller i symboler:

$$\forall x (x \in A \to x \in B).$$

18: Let A, B, and C be sets. Show that

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$

Delkapittel 2.2, Oppgave 18

Husk: Hvordan viser vi at for gitte mengder A, B så har vi at $A \subseteq B$? Man viser at alle elementer i A også er inneholdt i B. Eller i symboler:

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

18: Let A, B, and C be sets. Show that

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$

b) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$

Delkapittel 2.2, Oppgave 19

Husk: Hvordan viser vi at for gitte mengder A, B så har vi at $A = B$? Man viser at alle elementer i A også er inneholdt i B, og omvendt. Eller i symboler:

$$(A \subseteq B) \land (B \subseteq A).$$

19: Show that if A and B are sets, then

a) $(A - B) = (A \cap \overline{B})$

Delkapittel 2.2, Oppgave 19

Husk: Hvordan viser vi at for gitte mengder A, B så har vi at $A = B$? Man viser at alle elementer i A også er inneholdt i B, og omvendt. Eller i symboler:

$$(A \subseteq B) \land (B \subseteq A).$$

19: Show that if A and B are sets, then

a) $(A - B) = (A \cap \overline{B})$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Midtsemester 14, Oppgave 13

Dersom du vet at $C \cap (B - A) = C$, hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $C \subseteq B$ og $C \cap A = \emptyset$ $\bullet$

Midtsemester 14, Oppgave 13

Dersom du vet at $C \cap (B - A) = C$, hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $C \subseteq B$ og $C \cap A = \emptyset$ $\bullet$

Alt 2) $C - A = C - B$

Midtsemester 14, Oppgave 13

Dersom du vet at $C \cap (B - A) = C$, hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $C \subseteq B$ og $C \cap A = \emptyset$ $\bullet$

Alt 2) $C - A = C - B$

Alt 3) $B \subseteq C$

Midtsemester 14, Oppgave 13

Dersom du vet at $C \cap (B - A) = C$, hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $C \subseteq B$ og $C \cap A = \emptyset$ $\bullet$

Alt 2) $C - A = C - B$

Alt 3) $B \subseteq C$

Alt 4) $C = B - A$

Funksjoner I

Definisjon

La A og B være ikke-tomme mengder. En funksjon f fra A til B er en tilordning av nøyaktig et element av B til hvert element i A. Vi skriver $f(a) = b$ hvis b er det unike elementet av B tildelt ved funksjonen f til elementet a i A. Hvis f er en funksjon fra A til B, skriver vi $f : A \to B$.

Eksempler:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x$. (**Husk:** $\mathbb{R}$ står for de reelle tallene.)

Funksjoner I

Definisjon

La A og B være ikke-tomme mengder. En funksjon f fra A til B er en tilordning av nøyaktig et element av B til hvert element i A. Vi skriver $f(a) = b$ hvis b er det unike elementet av B tildelt ved funksjonen f til elementet a i A. Hvis f er en funksjon fra A til B, skriver vi $f : A \to B$.

Eksempler:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x$. (**Husk:** $\mathbb{R}$ står for de reelle tallene.)

b) $P(x)$ en proposisjonsfunksjon er en funksjon fra universet $\mathcal{U}$ til samlingen av alle proposisjoner. Konkret eksempel: $P(x)$ står for x er et positivt element i $\mathbb{R}$.

c) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Funksjoner II

Definisjon

La A og B være ikke-tomme mengder. Hvis f er en funksjon fra A til B kaller vi A for domenet til f og B for kodomenet til f. Hvis $f(a) = b$, sier vi at b er bildet av a og at a er prebildet til b. *Rekkevidden* eller *bildet* er mengden av alle bildene av elementer i A.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Funksjoner II

Definisjon

La A og B være ikke-tomme mengder. Hvis f er en funksjon fra A til B kaller vi A for domenet til f og B for kodomenet til f. Hvis $f(a) = b$, sier vi at b er bildet av a og at a er prebildet til b. *Rekkevidden* eller *bildet* er mengden av alle bildene av elementer i A.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$. Bildet til f er her $[0, \infty)$

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

Injektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *en-til-en* eller en *injeksjon* hvis og bare hvis $f(a) = f(b)$ medfører at $a = b$ for alle a og b i domenet til f. En funksjon kalles *injektiv* hvis den er *en-til-en*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** injektiv.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er injektiv siden den er strengt voksende på domenet.

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

Injektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 10

Determine whether each of these functions from $\{a, b, c, d\}$ to itself is one-to-one.

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$; merk: $f(a) = f(b)$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$; merk: $f(a) = f(d)$

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

Surjektive funksjoner I

Definisjon

En funksjon f sies å være *på* eller en *surjeksjon* hvis og bare hvis for alle b i B finnes det en a i A slik at $f(a) = b$. En funksjon f kalles surjektiv hvis den er *på*.

Eksempler:

a) Funksjoner fra $\{a, b, c, d, e\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv siden ingen negative reelle tall har reelle kvadratrøtter.

c) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = x^2$ er **ikke** surjektiv av samme grunn som forrige.

d) $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gitt ved $g(x) = x^2$ er surjektiv siden ethvert ikke-negativt reelt tall har en reell kvadratrot.

Surjektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 13

Which of the following functions from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$ are onto?

a) $f(n) = n - 1$

Surjektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 13

Which of the following functions from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$ are onto?

a) $f(n) = n - 1$

b) $f(n) = n^2 + 1$

Surjektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 13

Which of the following functions from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$ are onto?

a) $f(n) = n - 1$

b) $f(n) = n^2 + 1$

c) $f(n) = n^3$

Surjektive funksjoner II: Delkapittel 2.3, Oppgave 13

Which of the following functions from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$ are onto?

a) $f(n) = n - 1$

b) $f(n) = n^2 + 1$

c) $f(n) = n^3$

d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Midtsemester 17, Oppgave 9

La $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være definert ved $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = \lceil x \rceil$. (Her betegner $\lfloor x \rfloor$ (henholdsvis $\lceil x \rceil$) det største (henholdsvis minste) hele tallet mindre enn eller lik (henholdsvis større enn eller lik) x.) Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $f + g$ er injektiv

Midtsemester 17, Oppgave 9

La $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være definert ved $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = \lceil x \rceil$. (Her betegner $\lfloor x \rfloor$ (henholdsvis $\lceil x \rceil$) det største (henholdsvis minste) hele tallet mindre enn eller lik (henholdsvis større enn eller lik) x.) Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $f + g$ er injektiv

Alt 2) f^2 (gitt ved $f^2(x) = f(x)^2$) er surjektiv

Midtsemester 17, Oppgave 9

La $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være definert ved $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = \lceil x \rceil$. (Her betegner $\lfloor x \rfloor$ (henholdsvis $\lceil x \rceil$) det største (henholdsvis minste) hele tallet mindre enn eller lik (henholdsvis større enn eller lik) x.) Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $f + g$ er injektiv

Alt 2) f^2 (gitt ved $f^2(x) = f(x)^2$) er surjektiv

Alt 3) $g - f$ er surjektiv

Midtsemester 17, Oppgave 9

La $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ være definert ved $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = \lceil x \rceil$. (Her betegner $\lfloor x \rfloor$ (henholdsvis $\lceil x \rceil$) det største (henholdsvis minste) hele tallet mindre enn eller lik (henholdsvis større enn eller lik) x.) Hvilke av følgende er riktig?

Alt 1) $f + g$ er injektiv

Alt 2) f^2 (gitt ved $f^2(x) = f(x)^2$) er surjektiv

Alt 3) $g - f$ er surjektiv

Alt 4) $f + g$ er surjektiv •

Midtsemester 15, Oppgave 9

Hvor mange injektive funksjoner $f : A \to B$ finnes det, der $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Alt 1) 1296

Alt 2) 720

Alt 3) 360 •

Alt 4) 4096

Husk: Hvis man skal velge først mellom m forskjellige ting og så velge mellom n forskjellige ting, så har man totalt $m \cdot n$ mulige valg. Dette er *multiplikasjonsprinsippet*.

Midtsemester 16, Oppgave 9

La $g\colon \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\}$. Hvor mange forskjellige surjektive funksjoner g finnes det, dersom vi krever at $g(4) = c$?

Alt 1) 6

Alt 2) 10

Alt 3) 12 •

Alt 4) 20

Rekurrensrelasjoner: Delkapittel 2.4, Oppgave 12

Show that the sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

a) $a_n = 0$

Rekurrensrelasjoner: Delkapittel 2.4, Oppgave 12

Show that the sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

a) $a_n = 0$

b) $a_n = 1$

Rekurrensrelasjoner: Delkapittel 2.4, Oppgave 12

Show that the sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

a) $a_n = 0$

b) $a_n = 1$

c) $a_n = (-4)^n$; på øvingen!

Rekurrensrelasjoner: Delkapittel 2.4, Oppgave 12

Show that the sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

a) $a_n = 0$

b) $a_n = 1$

c) $a_n = (-4)^n$; på øvingen!

d) $a_n = 2(-4)^n + 3$

Dobbel summasjon: Delkapittel 2.4, Oppgave 33

Compute each of these double sums.

a) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (i + j)$

Dobbel summasjon: Delkapittel 2.4, Oppgave 33

Compute each of these double sums.

a) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (i + j)$

b) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} (2i + 3j)$

Spørsmål om emnene i uke 36

- Spørsmål?

Andre oppgaver fra læreboken

1. Midtsemesterprøve H13, Oppgaver 10 og 11
2. Delkapitler 2.1-2.4