Øvingsforelesning 1

TMA4140 Diskret Matematikk

03. og 05. september 2018

Velkommen til øvingsforelesningene i TMA4140

Hensikten med øvingsforelesningene

- Hva øvingsforelsningene brukes til

Hensikten med øvingsforelesningene

- Hva øvingsforelsningene brukes til
- Viktigheten av å stille spørsmål

Hensikten med øvingsforelesningene

- Hva øvingsforelsningene brukes til
- Viktigheten av å stille spørsmål
- De første to vil bli litt annerledes

Dagens øvingsforelesning

- Spørsmål til emnene i forrige uke
- Repetere "*Proposisjonslogikk og predikatlogikk*"
- Oppgaver fra midtsemesterprøver
- Oppgaver lik de fra første øving

Spørsmål om emnene i uke 35

- Spørsmål?
- Kan også stille spørsmål underveis!
- Hvis jeg ikke kan svare på noe, er det mulig jeg kan legge ut et notat om spørsmålet på nettsiden.

Proposisjonslogikk: Implikasjon

1. "Hvis p så q"
2. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \not\equiv q \rightarrow p$
3. Husk $\equiv$ er ikke et logisk konnektiv!

Proposisjonslogikk: Implikasjon

1. "Hvis p så q"
2. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \not\equiv q \rightarrow p$
3. Husk $\equiv$ er ikke et logisk konnektiv!
4. I likhet med *inklusiv eller* avviker denne litt fra hvordan man er vant til bruken i naturlige språk.

Proposisjonslogikk: Implikasjon

1. "Hvis p så q"
2. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \not\equiv q \rightarrow p$
3. Husk $\equiv$ er ikke et logisk konnektiv!
4. I likhet med *inklusiv eller* avviker denne litt fra hvordan man er vant til bruken i naturlige språk.
5. Selv i matematikken: "hvis"i definisjoner.

Proposisjonslogikk: Implikasjon

1. "Hvis p så q"
2. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \not\equiv q \rightarrow p$
3. Husk $\equiv$ er ikke et logisk konnektiv!
4. I likhet med *inklusiv eller* avviker denne litt fra hvordan man er vant til bruken i naturlige språk.
5. Selv i matematikken: "hvis"i definisjoner.
6. p bare hvis q og p med mindre $-q$.

Proposisjonslogikk: Eksempler I

1. Dersom Hans lærer seg diskret matematikk, så vil han finne seg en god jobb.

Proposisjonslogikk: Eksempler I

1. Dersom Hans lærer seg diskret matematikk, så vil han finne seg en god jobb.
2. For at Hans skal finne seg en god jobb, så er det tilstrekkelig at han lærer seg diskret matematikk.

Proposisjonslogikk: Eksempler I

1. Dersom Hans lærer seg diskret matematikk, så vil han finne seg en god jobb.
2. For at Hans skal finne seg en god jobb, så er det tilstrekkelig at han lærer seg diskret matematikk.
3. Hans vil finne seg en god jobb såfremt han lærer seg diskret matematikk.

Kontrapositiv I

1. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Kontrapositiv I

1. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
2. Sannhetstabell

Kontrapositiv I

1. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
2. Sannhetstabell
3. Kan bruke ekvivalenser.

Kontrapositiv II

1. Nyttig for bevis: La n være et heltall. Hvis n^2 er et oddetall, så må n være et oddetall.

Kontrapositiv II

1. Nyttig for bevis: La n være et heltall. Hvis n^2 er et oddetall, så må n være et oddetall.
2. Kan vise det direkte, men mer elegant å vise kontrapositiv: $n = 2k$ gir at $n^2 = 4k^2$.

Kontrapositiv III

1. $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
2. "hvis og bare hvis"

Distributive lover

1. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Distributive lover

1. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

En med sannhetstabeller, en med ekvivalenser.

Proposisjonslogikk: Midtsemesterprøve H16

En behøver ikke alltid å konstruere fullstendige sannhetstabeller!
Oppgave: Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $((r \to s) \to t) \leftrightarrow (r \to (s \to t))$

Proposisjonslogikk: Midtsemesterprøve H16

En behøver ikke alltid å konstruere fullstendige sannhetstabeller!
Oppgave: Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $((r \rightarrow s) \rightarrow t) \leftrightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))$

Alt 2) $(r \rightarrow (s \wedge \neg t)) \leftrightarrow ((t \vee \neg t) \wedge ((r \vee s) \wedge s))$

Proposisjonslogikk: Midtsemesterprøve H16

En behøver ikke alltid å konstruere fullstendige sannhetstabeller!
Oppgave: Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $((r \rightarrow s) \rightarrow t) \leftrightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))$

Alt 2) $(r \rightarrow (s \wedge \neg t)) \leftrightarrow ((t \vee \neg t) \wedge ((r \vee s) \wedge s))$

Alt 3) $((r \wedge s) \rightarrow t) \leftrightarrow ((r \rightarrow t) \wedge (s \rightarrow t))$

Proposisjonslogikk: Midtsemesterprøve H16

En behøver ikke alltid å konstruere fullstendige sannhetstabeller!
Oppgave: Hvilke av følgende logiske utsagn er en tautologi?

Alt 1) $((r \to s) \to t) \leftrightarrow (r \to (s \to t))$

Alt 2) $(r \to (s \wedge \neg t)) \leftrightarrow ((t \vee \neg t) \wedge ((r \vee s) \wedge s))$

Alt 3) $((r \wedge s) \to t) \leftrightarrow ((r \to t) \wedge (s \to t))$

Alt 4) $((r \to s) \wedge (s \to t)) \to (r \to t)$ $\circ$

Predikatlogikk I

1. Hensikt: å kunne analysere påstander, å bryte de ned i mer enn logiske konnektiver og atomiske påstander/proposisjoner.
2. Def: Vi kaller $P(x), Q(x), R(x, y), \ldots$ for proposisjonsfunksjoner.

Predikatlogikk I

1. Hensikt: å kunne analysere påstander, å bryte de ned i mer enn logiske konnektiver og atomiske påstander/proposisjoner.
2. Def: Vi kaller $P(x), Q(x), R(x, y), \ldots$ for proposisjonsfunksjoner.
3. Eksempel: La $Q(x)$ være proposisjonsfunksjonen "x er en student".

Predikatlogikk I

1. Hensikt: å kunne analysere påstander, å bryte de ned i mer enn logiske konnektiver og atomiske påstander/proposisjoner.
2. Def: Vi kaller $P(x), Q(x), R(x, y), \ldots$ for proposisjonsfunksjoner.
3. Eksempel: La $Q(x)$ være proposisjonsfunksjonen "x er en student".
4. Vanligvis er x, y, z variabler.

Predikatlogikk I: Eksempler I

1. ''Sokrates er et godt menneske'' medfører at 'Sokrates er et menneske''

Predikatlogikk I: Eksempler I

1. ''Sokrates er et godt menneske'' medfører at 'Sokrates er et menneske''
2. La $G(x)$ stå for ''x er god'', $M(x)$ står for ''x er et menneske'', og s står for Sokrates. Da kan vi oversette setningen til $G(s) \wedge M(s)$''

Predikatlogikk I: Eksempler II

1. x fjusket med fengselseksperimentet.

Predikatlogikk I: Eksempler II

1. x fjusket med fengselseksperimentet.
2. La h være Philip Zimbardo.

Predikatlogikk I: Eksempler II

1. x fjusket med fengselseksperimentet.
2. La h være Philip Zimbardo.
3. h fjusket med fengselseksperimentet.

Predikatlogikk I: Eksempler II

1. x fjusket med fengselseksperimentet.
2. La h være Philip Zimbardo.
3. h fjusket med fengselseksperimentet.
4. Eller: $P(h)$.

Predikatlogikk I: Eksempler II

1. x fjusket med fengselseksperimentet.
2. La h være Philip Zimbardo.
3. h fjusket med fengselseksperimentet.
4. Eller: $P(h)$.
5. $P(x)$ er en proposisjonsfunksjon. $P(h)$ er verdien av $P(x)$ på $x = h$. $P(h)$ er en proposisjon.

Predikatlogikk II

1. Med domenet/universet mener vi alltid en eller annen bestemt samling elementer.

Predikatlogikk II

1. Med domenet/universet mener vi alltid en eller annen bestemt samling elementer.
2. Def: $\forall x P(x)$ betyr at $P(x)$ holder for alle x i domenet/universet.

Predikatlogikk II

1. Med domenet/universet mener vi alltid en eller annen bestemt samling elementer.
2. Def: $\forall x P(x)$ betyr at $P(x)$ holder for alle x i domenet/universet.
3. Def: $\exists x P(x)$ betyr at $P(x)$ holder for minst en x i domenet/universet.

Predikatlogikk II

1. Med domenet/universet mener vi alltid en eller annen bestemt samling elementer.
2. Def: $\forall x P(x)$ betyr at $P(x)$ holder for alle x i domenet/universet.
3. Def: $\exists x P(x)$ betyr at $P(x)$ holder for minst en x i domenet/universet.
4. Vi må alltid huske å spesifisere domenet/universet.

Predikatlogikk II: Eksempler

La $U = \mathbb{R}$, de reelle tallene. Merk at vi her bruker kvantorer med begrensning.

1. $\forall x < 0\, (x^2 > 0)$

Predikatlogikk II: Eksempler

La $U = \mathbb{R}$, de reelle tallene. Merk at vi her bruker kvantorer med begrensning.

1. $\forall x < 0\, (x^2 > 0)$
2. Uttrykket i forrige ekvivalent med $\forall x(x < 0 \to x^2 > 0)$.

Predikatlogikk II: Eksempler

La $U = \mathbb{R}$, de reelle tallene. Merk at vi her bruker kvantorer med begrensning.

1. $\forall x < 0\, (x^2 > 0)$
2. Uttrykket i forrige ekvivalent med $\forall x (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$.
3. $\exists z > 0\, (z^2 = 2)$; usann for $U = \mathbb{Q}$, de rasjonale tallene.

Predikatlogikk II: Eksempler

La $U = \mathbb{R}$, de reelle tallene. Merk at vi her bruker kvantorer med begrensning.

1. $\forall x < 0\,(x^2 > 0)$
2. Uttrykket i forrige ekvivalent med $\forall x(x < 0 \to x^2 > 0)$.
3. $\exists z > 0\,(z^2 = 2)$; usann for $U = \mathbb{Q}$, de rasjonale tallene.
4. Tenk på "løkker".
5. En kan tenke på $\forall$ som potensielt "uendelig mange" $\wedge$ og $\exists$ som potensielt "uendelig mange" $\vee$.

Predikatlogikk II: Eksempler

La $U = \mathbb{R}$, de reelle tallene. Merk at vi her bruker kvantorer med begrensning.

1. $\forall x < 0\, (x^2 > 0)$
2. Uttrykket i forrige ekvivalent med $\forall x (x < 0 \to x^2 > 0)$.
3. $\exists z > 0\, (z^2 = 2)$; usann for $U = \mathbb{Q}$, de rasjonale tallene.
4. Tenk på "løkker".
5. En kan tenke på $\forall$ som potensielt "uendelig mange" $\wedge$ og $\exists$ som potensielt "uendelig mange" $\vee$.
6. La universet U være $\{1, 2, 3\}$. Betrakt $\forall x\, (x^2 \leq 9)$.

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 7

La universalmengden være de reelle tallene $\mathbb{R}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\neg\forall a\forall b\exists c\,((a \leq c \leq b) \vee (b \leq c \leq a))$

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 7

La universalmengden være de reelle tallene $\mathbb{R}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\neg\forall a \forall b \exists c\, ((a \leq c \leq b) \vee (b \leq c \leq a))$

Alt 2) $\forall a \forall b \exists c\, ((a < b) \rightarrow ((c > a) \wedge (c < b)))$ $\circ$

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 7

La universalmengden være de reelle tallene $\mathbb{R}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\neg\forall a\forall b\exists c\,((a \leq c \leq b) \vee (b \leq c \leq a))$

Alt 2) $\forall a\forall b\exists c\,((a < b) \rightarrow ((c > a) \wedge (c < b)))$ $\circ$

Alt 3) $\neg\exists a\forall b\exists c\,(ab = b^2c + c)$

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 7

La universalmengden være de reelle tallene $\mathbb{R}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\neg\forall a\forall b\exists c\,((a \leq c \leq b) \vee (b \leq c \leq a))$

Alt 2) $\forall a\forall b\exists c\,((a < b) \rightarrow ((c > a) \wedge (c < b)))$ $\circ$

Alt 3) $\neg\exists a\forall b\exists c\,(ab = b^2c + c)$

Alt 4) $\neg\forall a\forall b\,((a < b) \rightarrow (a^2 < b^2))$ $\circ$

Predikatlogikk III: Seksjon 1.5, Oppgave 30

Rewrite each of these statements so that negations appear only within predicates (that is, so that no negation is outside a quantifier or an expression involving logical connectives).

- b) $\neg\forall x \exists y P(x, y)$

Predikatlogikk III: Seksjon 1.5, Oppgave 30

Rewrite each of these statements so that negations appear only within predicates (that is, so that no negation is outside a quantifier or an expression involving logical connectives).

- b) $\neg\forall x\exists y P(x, y)$
- d) $\neg\exists y(\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$

Predikatlogikk III: Seksjon 1.5, Oppgave 12

Let $I(x)$ be the statement "x has an Internet connection"and $C(x, y)$ be the statement "x and y have chatted over the Internet, where the domain for the variable x and y consists of all students in your class. Use quantifiers to express each of these statements.

- h) Exactly one student in your class has an Internet connection.

Predikatlogikk III: Seksjon 1.5, Oppgave 12

Let $I(x)$ be the statement "x has an Internet connection"and $C(x, y)$ be the statement "x and y have chatted over the Internet, where the domain for the variable x and y consists of all students in your class. Use quantifiers to express each of these statements.

- h) Exactly one student in your class has an Internet connection.
- i) Everyone except one student in your class has an Internet connection.
- l) There are at least two students in your class who have not chatted with each other.

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 8

La universalmengden være $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\exists a \forall b \, (13 \mid a^b)$ $\circ$

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 8

La universalmengden være $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\exists a \forall b \, (13 \mid a^b)$ $\circ$

Alt 2) $\exists b \forall a \, (13 \mid a^b - 1)$

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 8

La universalmengden være $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\exists a \forall b \, (13 \mid a^b) \circ$

Alt 2) $\exists b \forall a \, (13 \mid a^b - 1)$

Alt 3) $\forall a \exists b \, (a^b > b^a) \circ$

Predikatlogikk III: Midtsemesterprøve H16 Oppgave 8

La universalmengden være $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Hvilke av følgende utsagn er garantert riktige?

Alt 1) $\exists a \forall b\,(13 \mid a^b)$ $\circ$

Alt 2) $\exists b \forall a\,(13 \mid a^b - 1)$

Alt 3) $\forall a \exists b\,(a^b > b^a)$ $\circ$

Alt 4) $\exists a \forall b (a^b > b^a)$