Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2016

Løsningsforslag — Øving 8

Seksjon 9.1

7 Egenskapene til de ulike relasjonene på heltallene er gjengitt i tabellen under.

	Refleksiv	Symmetrisk	Antisymmetrisk	Transitiv
a)	Nei	Ja	Nei	Nei
b)	Nei	Ja	Nei	Ja
c)	Nei	Ja	Nei	Nei
d)	Ja	Ja	Nei	Ja
e)	Ja	Nei	Nei	Ja
f)	Ja	Ja	Nei	Ja
g)	Nei	Nei	Ja	Nei
h)	Nei	Nei	Ja	Ja

40 Siden relasjonene er på de positive heltallene får vi at

$$(a,b) \in R_2 \iff a = bc \text{ for en } c \in \mathbb{Z}^+ \iff b \mid a.$$

Så R_2 er «speilingen» av R_1. (Dvs. $R_2 = R_1^{-1}$ i notasjonen fra Seksjon 9.3.)

a) Relasjonen $R_1 \bigcup R_2$ består av alle par av positive heltall (a,b) der $a \mid b$ eller $b \mid a$.

c) Relasjonen $R_1 - R_2$ består av alle par av positive heltall (a,b) der $a \mid b$ og $b \nmid a$, med andre ord $a \mid b$ og $a \neq b$.

Seksjon 9.3

10 La $A = \{1,2,3,\ldots,999,1000\}$. Hvis R er en relasjon på A, så vil matrisen som representerer R, M_R, ha $1000^2 = 1\,000\,000$ elementer totalt. For et par $(a,b) \in A \times A$, så lar vi a parametrisere radene og b kolonnene i M_R.

a) For $R = \{(a,b) \mid a \le b\}$ så er matrisen på formen

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dette fordi $a \le b$ blir « radnummeret er mindre enn kolonnenummeret». Summerer vi antall enere i hver rad får vi at

$$\#\text{ enere } = 1 + 2 + \cdots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\,500.$$

b) Når $R = \{(a,b) \mid a = b \pm 1\}$ ser vi at et tall a kun er relatert til $a+1$ og $a-1$. Dermed får vi matrisen

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er 999 enere over og under diagonalen så vi får # enere $= 1998$.

c) Når $R = \{(a,b) \mid a+b = 1000\}$ ser vi at 1000 ikke er relatert til noen og at $a \neq 1000$ kun er relatert til $1000-a$. Dermed får vi matrisen

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen har 999 enere.

d) Når $R = \{(a,b) \mid a+b \leq 1001\}$ ser vi at et tall a er relatert med $b = 1,2,3,\ldots 1001-a$. Dermed får vi matrisen

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ved samme argumentasjon som i **a)** ser vi at M_R har 500 500 enere.

e) Når $R = \{(a,b) \mid a \neq 0\}$ ser vi at $R = A \times A$ siden $0 \notin A$. Dermed er

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

som har 1 000 000 enere.

14 **a)**

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 0 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bigwedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 0 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Det vanlige matriseproduktet er

$$M_{R_1} \cdot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra dette ser vi at

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seksjon 9.4

16 **a)** Ja.

b) Nei (det er ingen kant fra e til c).

c) Ja.

d) Nei (det er ingen kant fra d til a).

e) Ja.

f) Nei (det er ingen kant fra b til b).

20 **a)** $(a,b) \in R^2$ dersom det er mulig å komme seg fra a til b med to flyturer.

b) $(a,b) \in R^3$ dersom det er mulig å komme seg fra a til b med tre flyturer.

c) $(a,b) \in R^*$ dersom det er mulig å komme seg fra a til b med fly (uavhengig av hvor mange flyturer man tar).

24 Nei, fordi det er mulig for R^2 å inneholde par på formen (a,a), selv om R ikke gjør det. Et eksempel er $R = \{(1,2),(2,1)\}$, som gir $R^2 = \{(1,1),(2,2)\}$.

Seksjon 9.5

$\boxed{9}$ La $f\colon A \to B$ være en funksjon der A og B er ikke-tomme mengder. Relasjonen R på A er gitt ved at $(x, y) \in R$ hvis og bare hvis $f(x) = f(y)$, for to elementer $x, y \in A$.

a) Vi viser at R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

1. For alle $x \in A$ er $f(x) = f(x)$, så $(x, x) \in R$. Dette viser at R er refleksiv.
2. Hvis $(x, y) \in R$ så er $f(x) = f(y)$, men det er det samme som at $f(y) = f(x)$ som betyr at $(y, x) \in R$. Dette viser at R er symmetrisk.
3. Hvis $(x, y) \in R$ og $(y, z) \in R$ så er $f(x) = f(y)$ og $f(y) = f(z)$. Dette gir $f(x) = f(y) = f(z)$ som betyr at $(x, z) \in R$. Dette viser at R er transitiv.

Følgelig er R er en ekvivalensrelasjon.

b) For et element $x \in A$ så er ekvivalensklassen til x mengden $[x] = \{y \in A \mid f(x) = f(y)\}$. Altså består ekvivalensklassen til x av de elementene i A som sendes på samme verdi som x under funksjonen f.

Om vi lar $b = f(x)$ betegne elementet i B som x sendes på, ser vi at

$$[x] = \{y \in A \mid f(x) = f(y)\} = \{y \in A \mid f(y) = b\} = f^{-1}(\{b\}).$$

$\boxed{16}$ Relasjonen R på $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ er gitt ved at $((a, b), (c, d)) \in R$ hvis og bare hvis $ad = bc$. Vi ønsker å vise at R er en ekvivalensrelasjon så vi må vise at R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

1. For alle $(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ så er $ab = ba$, så $((a, b), (a, b)) \in R$. Dette viser at R er refleksiv.
2. Hvis $((a, b), (c, d)) \in R$ så er $ad = bc$, men det er det samme som at $da = cb$ som betyr at $((c, d), (a, b)) \in R$. Dette viser at R er symmetrisk.
3. Hvis $((a, b), (c, d)) \in R$ og $((c, d), (e, f)) \in R$ så er $ad = bc$ og $cf = de$. Ganger vi sammen disse to ligningene får vi $afdc = bedc$, og siden dette er positive heltall kan vi forkorte dc og få at $af = be$, som betyr at $((a, b), (e, f)) \in R$. Dette viser at R er transitiv.